Analyse 3 – Intégrales – DL : révisions
Quelques éléments de correction

Intégration

Exercice 5 – On note à chaque fois F les primitives. L'expression $+C$ signifie qu'on obtient toutes les primitives en ajoutant à l'expression donnée n'importe quelle constante réelle.

1. $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   N'hésitez par à écrire le dernier terme sous la forme $x^{-\frac{3}{2}}$ pour vous aider à le primitiver
2. $F(x) = \dfrac{3}{2}(\operatorname{Arctan} x)^{\frac{2}{3}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement sur $\mathbb{R}_-^*$)
   En effet, on a une expression de la forme $u'u^{-\frac{1}{3}}$
3. $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + C$, sur $\mathbb{R}$.
   En effet, le polynôme de degré 2 est toujours positif ($\Delta > 0$), et on a une expression du type $\frac{1}{2} \cdot u' \cdot u^{\backslash\frac{1}{2}}$.
4. $F(x) = \ln(|\ln x|) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet on a du $\frac{u'}{u}$.
5. $F(x) = -\cos(\mathrm{e}^x) + C$ sur $\mathbb{R}$
6. N'admet pas de primitive explicitable (on est ramené à $\int \frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y$ après changement de variable, donc à une primitive pour l'intégrale de Dirichlet).
7. Par composition : $F(x) = \tan(\ln x) + C$.
   Si on ne voit pas la composition, on peut aussi faire un changement de variable $y = \ln t$ sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
8. $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + C$
   En effet, c'est $\frac{u'}{u}$.
9. Le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on pourra donc écrire cette fraction rationnelle sous la forme $\frac{a}{x+2} + bx + 3$. On trouve $b = 3$ et $a = -2$, d'où :
   $F(x) = 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$, $]3, +\infty[$.
10. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.
    Ainsi : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$, sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
    N'oubliez pas de sortir la partie polynomiale de la fraction, obtenue en effectuant une division euclidienne.
11. On trouve, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$.
    Ainsi, $F(x) = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$ sur $]-\infty, -1[$, $]1, -1[$ ou $]1, +\infty[$.
12. Constatez que la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$. Ainsi, on a $-u' \cdot u$, d'où :
    $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}\right)^2 + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
    On peut le retrouver par un changement de variable $y = \frac{1}{x}$.
13. On a, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{1+x+x^2}$, puis :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{sqrt3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.

14. Après factorisation du dénominateur, et décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x-1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x+1)^2+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x-1)^2+1}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1) - \ln(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot x+1) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot x-1)\Big) + C,$$

sur $\mathbb{R}$.

15. **Rappel : Si on note $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ une primitive de f (notation définie à une constante additive près), le changement de variable s'exprime par la formule**

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où la première primitive est exprimée avec la variable x, et la seconde avec la variable t. Les nouvelles expressions des bornes partent pour la borne inférieure dans la constante (on base simplement la primitive en un autre point), ou dans la réexpression de t en fonction de x, effectuée en fin de calcul.

La fonction est définie sur $]-1,1]$. Ici, on pose $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. On a alors

$$x = \frac{1+y^2}{1-y^2} = \varphi(y) \qquad \text{donc:} \qquad \mathrm{d}x = \frac{4y}{(1-y^2)^2}$$

puis, φ étant $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1]$,

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{4y^2}{(1-y^2)^2}\ \mathrm{d}y.$$

Second rappel : l'intégration par partie s'exprime sur les primitives sous la forme :

$$\int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x),$$

le seconde terme de la variation de uv partant dans le constante d'intégration

Ainsi, en posant

$$\forall y, \quad u(y) = 2y \qquad \text{et} \qquad v(y) = \frac{1}{1-y^2},$$

de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2y}{1-y^2} - \int \frac{2}{1-y^2} = \frac{2y}{1-y^2} + \ln|1-y| - \ln|1+y|.$$

On trouve alors les primitives de f en remplaçant y par $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ dans cette expression, et en ajoutant une constante quelconque.

16. On fait une IPP, sur le même principe que dans la question précédente :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} = -\frac{1+\ln x}{x} + C,$$

sur $]0,+\infty[$.

17. On a :

$$f(x) = \sin x\cos^2 x(1-\cos^2 x) = \sin x\cos^2 x - \sin x\cos^4 x.$$

Donc

$$F(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

18. $f(x)=\sin^4 x-\sin^6 x$. On linéarise :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin^4 x=\frac{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^4}{(2\,\mathrm{i})^4}=\frac{1}{16}(2\cos 4x-8\cos 2x+6),$$

en développant la puissance quatrième à l'aide de la formule du binôme de Newton. De même

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin^6 x=-\frac{1}{64}(2\cos 6x-12\cos 4x+30\cos 2x-20)$$

Ainsi,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{16}-\frac{\cos 2x}{32}-\frac{\cos 4x}{16}+\frac{\cos 6x}{32},$$

et donc,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\frac{t}{16}-\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 6x}{192}+C$$

Exercice 6 –

1. Soit $k\in\mathbb{Z}$. On a : $\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[,\ f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}-\cos x\sin x$, d'où :

$$\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[,\quad F(x)=\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$$

2. En effectuant un changement de variables $u=\cos x$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=-\int\frac{1}{2-u^2}\ \mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)\ \mathrm{d}u.$$

Ainsi :

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x-\sqrt{2}|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x+\sqrt{2}|,$$

sur $]-\infty,-\sqrt{2}[$, $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ ou $]\sqrt{2},+\infty[$.

3. Un changement de variables $y=\cos x$ donne :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{(1-y^2)^2(1+y^2)}$$

Et là, bonjour les calculs.

Soit on fait une décomposition en éléments simples de la fraction, donc de la forme

$$\frac{1}{1-y^2)^2(1+y^2)}=\frac{a}{(1-y)^2}+\frac{b}{1-y}+\frac{c}{(1+y)^2}+\frac{d}{1+y}+\frac{ey+g}{1+y^2},$$

Soit on ruse, en décomposant d'abord la fraction en $z=y^2$, donc de la forme :

$$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)}=\frac{a}{(1-z)^2}+\frac{b}{(1-z)}+\frac{c}{1+z}.$$

Après mise sur le même dénominateur et identification, on trouve :

$$\frac{1}{(1-y^2)^2(1+y^2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-y^2)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

On a :

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2}=\int\frac{1-y^2+y^2}{(1-y^2)^2}=\int\frac{1}{(1-y^2)}+\int\frac{y^2}{(1-y^2)^2},$$

et en effectuant une IPP dans ce dernier terme :

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2}=\int\frac{1}{(1-y^2)}+\frac{y}{2(1-y^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-y^2)}+\frac{y}{2(1-y^2)}$$

Or : $\displaystyle\int\frac{1}{1-y^2}=\frac{1}{2}\int\left(frac11-y+\frac{1}{1+y}\right)\ \mathrm{d}y$. Ainsi :

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{1-y^2}+\frac{1}{6}\ln|1-y|-\frac{1}{6}\ln|1+y|-\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}y+C\\&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{6}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\cos x+C\end{aligned}$$

sur tout intervalle $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. Changement de variable $t = \tan x$:
$$\int f(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta \tan^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\alpha + \beta t^2} \, dt$$
   - Si $\alpha = \beta = 0$, ce n'est pas défini ;
   - Si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $F(x) = -\dfrac{1}{\beta \tan x} + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $F(x) = \dfrac{\tan x}{\alpha} + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} \tan x\right) + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta < 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|\alpha\beta|}} \left(\ln\left|1 + \sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|} \tan x\right| - \ln\left|1 - \sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|} \tan x\right| \right) + C.$

   (défini sur $\mathbb{R}$)
5. On traite les deux dernières questions conjointement en notant F une primitive de 5, G une primitive de 6. Alors :
$$F(x) + G(x) = \int 1 \, dx = x + C_1$$
   et
$$G(x) - F(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \ln|\sin x + \cos x| + C_2.$$
   Ainsi, en résolvant le système obtenu :
$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} + C_3, \qquad \text{et} \qquad G(x) = -\frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} + C_4,$$
   sur tout intervalle $]k\pi - \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}[$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Voir question précédente.

Exercice 7 –

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{2\ln^2 3}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan x \, dx = \Big[-\ln|\cos x| \Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2.$
3. C'est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u = \ln \circ \ln$. Ainsi :
$$\int_{e^e}^{x} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)} = \Big[\ln|\ln \ln x| \Big]_{e^e}^{x} = \ln|\ln \ln x|,$$
   pour $x \in]1, +\infty[\setminus \{e\}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2 x - 1 \, dx = \Big[\tan x - x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$
5. IPP avec $u(x) = \ln^2 x$, $v'(x) = 1$:
$$\int_1^2 \ln^2 x \, dx = 2\ln^2 2 - 2 \int_1^2 \ln x \, dx,$$
   et re-IPP :
$$\int_1^2 \ln^2 x \, dx = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 2 \int_1^2 1 \, dx = 2(\ln^2 2 - \ln 2 + 1).$$
6. Quatre IPP successives, pour diminuer petit à petit le degré de x^4 :
$$\int_0^1 x^4 e^x \, dx = 1 - 4 \int_0^1 x^3 e^x \, dx = -3 + 12 \int_0^1 x^2 e^x \, dx = 9 - 24 \int_0^1 x e^x \, dx = -15 + 24 \int_0^1 e^x \, dx = 24e - 39.$$
7. Deux IPP successives, en dérivant à chaque fois la fonction trigonométrique (calcul classique) :
$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = -\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$$
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

8. Une IPP en dérivant x :
$$\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = \Big[x\tan x\Big]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x\ \mathrm{d}x = \sqrt{3} + \ln\frac{1}{2} = \sqrt{3} - \ln 2.$$
9. Rebelotte.
$$\int_0^{\pi/3} x\tan^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} x(\tan^2 x + 1)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{18} = \sqrt{3} - \frac{\pi^2}{18} + \ln 2,$$
par IPP en intégrant $1 + \tan^2 x$.
10. Cdv $x = y^6$:
$$\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{6y^5\ \mathrm{d}y}{y^3 + y^2} = 6\int_1^2 \left(y^2 - y + 1 - \frac{1}{1+y}\right)\ \mathrm{d}y,$$
par une division euclidienne. Ainsi,
$$\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\left(\frac{7}{3} - 1 + 1 - \ln 3 + \ln 2\right) = 14 - 6\ln 3 + 6\ln 2.$$
11. cdv $x = \sin t$, pour faire partir la racine avec les propriétés du sin et du cos :
$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^3 t\ \mathrm{d}t$$
puis linéarisation :
$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \cos^4 t = \frac{1}{16}\left(2\cos 4t + 8\cos 2t + 6\right),$$
donc
$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16}.$$
12. Fastoche !
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)} = \Big[\operatorname{Arctan}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{4}.$$
13. On pose $y = \sqrt{x+1}$, soit $x = y^2 - 1$. Alors
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} 2(y^2-1)\ \mathrm{d}y = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)^2 - 2(\sqrt{2}-1).$$
14. cdv $y = x^n$:
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+3)} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{n-1}\ \mathrm{d}x}{x^n(x^n+3)}\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2^n}}^1 \frac{\mathrm{d}y}{y(y+3)}\\ &= \frac{1}{3}\ln(2^n) - \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)\right) = \frac{n-2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)\end{aligned}$$
15. On fait une DES (décomposition en éléments simples) en 2 étapes, en commençant par une DES de la fraction en la variable $y = x^2$. Ainsi :
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x$$
On trouve alors :
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} 3 - \operatorname{Arctan} 2).$$
16. On obtient l'expression suivante (voir Exo 5, n° 14), après DES, découpage des fractions obtenues, et mise sous forme canonique :
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = &\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x+1)^2+1}\ \mathrm{d}x\\ &- \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x-1)^2+1}\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$
puis
$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)\right).$$