Correction du Devoir Surveillé n° 1

Exercice 1 –

1. (a) Soit X et Y deux variables aléatoires admettant des variances. Alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

(b) On obtient alors facilement par récurrence l'égalité souhaitée.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: pour tout n-uplet $(T_1, \dots, T_n)$ de variables aléatoires admettant des variances, on a :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{cov}(T_i, T_j).$$

.

La relation est triviale pour $n = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vrai. On peut aussi remarquer, même si cela n'est formellement pas nécessaire, que $\mathcal{P}(2)$ est la propriété énoncée dans la question 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai, et soit $(T_1, \dots T_{n+1})$ un $(n+1)$-uplet de variables aléatoires admettant une variance. Alors, d'après la question 1,

$$V(T_1 + \cdots + T_{n+1}) = V(T_1 + \cdots + T_n) + V(T_{n+1}) + 2\mathrm{cov}(T_1 + \cdots + T_n, T_{n+1}).$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, et en exploitant la bilinéarité de la covariance, on obtient :

$$V(T_1 + \cdots + T_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{cov}(T_i, T_j) + V(T_{n+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cov}(T_i, T_{n+1}).$$

La somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{cov}(T_i, T_j)$ est indexée sur tous les couples $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $i < j$ et $j \neq n+1$, tandis que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{cov}(T_i, T_{n+1})$ regroupe tous les indices $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $i < j$ et $j = n+1$. Ainsi, en regroupant ls deux sommes, on a tous les indices $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $i < j$. Par conséquent,

$$V(T_1 + \cdots + T_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} V(T_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \mathrm{cov}(T_i, T_j).$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

2. La variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance et une variance, en tant que somme finie de variables admettant une espérance et une variance. De plus, par linéarité de l'espérance, et d'après l'expression des espérances des variables de Bernoulli, on obtient :

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p^k = p \cdot \frac{1-p^n}{1-p},$$

puisque $p \neq 1$. De plus, les variables X_k, $k \in [\![1,n]\!]$, étant mutuellement indépendantes,

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p^k(1-p^k) = \sum_{k=1}^{n} p^k - \sum_{k=1}^{n} p^{2k} = p \cdot \frac{1-p^n}{1-p} - p^2 \cdot \frac{1-p^{2n}}{1-p^2}.$$

Une mise au même dénominateur donne alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{p(1+p)(1-p^n) - p^2(1-p^{2n})}{1-p^2} = \frac{p(1-p^n) + p^2(p^{2n}-p^n)}{1-p^2} = \frac{p(1-p^n)(1-p^{n+1})}{1-p^2}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire Y_n, produit de deux variables de Bernoulli, prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, l'événement $[Y_n = 1]$ est réalisé si et seulement si les événements $[X_n = 1]$ et $[X_{n+1} = 1]$ sont réalisés. Ainsi,

$$[Y_n = 1] = [X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1],$$

et, les X_i étant mutuellement indépendants, on obtient :

$$P(Y_n = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1) = p^n p^{n+1} = p^{2n+1}.$$

Ainsi, Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p^{2n+1}.

(b) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = p^{2n+1}$, et ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} p^{2k+1} = p^3 \sum_{k=0}^{n-1} p^{2k} = p^3 \cdot \frac{1-p^{2n}}{1-p^2}.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la même manière, Y_nY_{n+1} prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, donc il va s'agir d'une variable de Bernoulli. Les variables Y_n etY_{n+1} n'étant pas indépendantes, on ne peut pas raisonner de même ; on repasse donc aux variables X_i. On a :

$$Y_nY_{n+1} = X_nX_{n+1}^2X_{n+2},$$

ainsi, Y_nY_{n+1} prend la valeur 1 si et seulement si les trois variables X_n, X_{n+1} et X_{n+2} prennent la valeur 1 (sinon l'une au moins s'annule, et Y_nY_{n+1} prend la valeur 0). Ainsi

$$[Y_nY_{n+1} = 1] = [X_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1] \cap [X_{n+2} = 1],$$

et l'indépendance des X_i amène :

$$P(Y_nY_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1)P(X_{n+2} = 1) = p^n p^{n+1} p^{n+2} = p^{3n+3}.$$

Ainsi, Y_nY_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre p^{3n+3}. Son espérance est donc :

$$E(Y_nY_{n+1}) = p^{3n+3}.$$

(b) Puisque $\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell) = \mathrm{cov}(Y_\ell, Y_k)$, on peut se contenter des couples (k,ℓ) tels que $k \leqslant \ell$. Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \leqslant \ell$. Trois cas se produisent :

- si $k = \ell$, alors $\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell) = \mathrm{cov}(Y_k, Y_k) = V(Y_k) = p^{2n+1}(1-p^{2n+1})$;
- si $k < \ell - 1$, alors Y_k ne dépendant que de X_k et X_{k+1}, et Y_ℓ ne dépendant que de X_ℓ et $X_{\ell+1}$, puisque les indices k, $k+1$, ℓ et $\ell+1$ sont deux à deux distincts et que les variables X_i sont mutuellement indépendantes, on en déduit que Y_k et Y_ℓ sont indépendantes, et par conséquent, $\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell) = 0$;
- si $k = \ell - 1$, alors

$$\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell) = \mathrm{cov}(Y_k, Y_{k+1}) = E(Y_kY_{k+1}) - E(Y_k)E(Y_{k+1}) = p^{3k+3} - p^{2k+1}p^{2k+3} = p^{3k+3}(1-p^{k+1}).$$

(c) D'après la question 1 et les covariances calculées dans la question précédente, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p^{2k+1}(1-p^{2k+1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) \\
&= p^3 \cdot \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^6 \cdot \frac{1-p^{4n}}{1-p^4} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p^{3k+3} - p^{4k+4}) \\
&= p^3 \cdot \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^6 \cdot \frac{1-p^{4n}}{1-p^4} + 2p^6 \cdot \frac{1-p^{3n-3}}{1-p^3} - 2p^8 \cdot \frac{1-p^{4n-4}}{1-p^4}.
\end{aligned}$$

On ne peut pas simplifier substantiellement cette expression.

Exercice 2 – (D'après ESCP-EAP 2002 Math III, option Eco)

1. (a) On a : $A = J - 4I$, donc $J = A + 4I$.

   (b) Un calcul de produit matriciel simple amène immédiatement :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J.$$

   Puisque $I^2 = I$, et $IJ = JI = J$ (la commutativité nous permettant d'utiliser la formule du binôme), on en déduit que :

$$A^2 + 5A + 4I = (J-4I)^2 + 5(J-4I) + 4I = J^2 - 8J + 16I + 5J - 20I + 4I = 3J - 8J + 5J = 0.$$

   (c) En isolant I dans l'expression précédente, on obtient :

$$I = \frac{1}{4}(-A^2 - 5A) = A \cdot \left(-\frac{1}{4}(A+5I)\right) = \left(-\frac{1}{4}(A+5I)\right) \cdot A.$$

   Ainsi, par définition de l'inverse, A est inversible, et

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+5I) = -\frac{1}{4}(J - 4I + 5I) = -\frac{1}{4}(I+J).$$

2. (a) Le scalaire λ est valeur propre de J si et seulement $J - \lambda I$ est non inversible. On effectue un pivot de Gauss sur la matrice $J - \lambda I$ pour déterminer les conditions de non inversibilité

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 2\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda$$

   Ainsi, $J - \lambda I$ est non inversible si et seulement un des coeficients diagonaux de la résuite de Gauss est nul, donc si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 3$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}$.

- La matrice M_0 est égale à $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc est de rang 1. D'après le théorème du rang, $\dim E_0 =$ 2. De plus, $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est dans E_0 si et seulement si $M_0X = 0$, donc si $x+y+z=0$. Il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants solutions de cette équation pour obtenir une base de E_0, par exemple $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
- La matrice M_3 est égale à $\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Ainsi, $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est dans E_3 si et seulement si $x+y-2z=0$ et $y=z$, donc si $x=y=z$. Ainsi, $M_3 = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(b) La matrice J n'est pas inversible, puisque 0 est valeur propre de J. La matrice J est diagonalisable, puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3, l'ordre de la matrice J.

3. (a) Cela ne nécessite pas de calcul supplémentaire. On part de la relation de diagonalisation de J. D'après les calculs précédents, en posant :

$$\Delta = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

on sait que P est inversible (matrice de passage) et que

$$J = P\Delta P^{-1}.$$

Alors,

$$A = J - 4I = P\Delta P^{-1} - 4PP^{-1} = P(\Delta - 4I)P^{-1} = PDP^{-1},$$

où $D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que A est diagonalisable. Donner explicitement une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) En inversant la relation $A = PDP^{-1}$, puisque D est inversible, on obtient :

$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$

avec $D^{-1} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. Ainsi, A^{-1} est diagonalisable (dans la même base de diagonalisation que A), et $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{-\frac{1}{4}, -1\}$.

4. Calcul de $A^n, n \in \mathbb{N}$, par trois méthodes différentes.

(a) Un argument de récurrence permet d'obtenir rapidement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Pour effectuer ce calcul, il faut donc commencer par expliciter P^{-1} On effectue pour cela un pivot de Gauss sur la matrice P, en agissant de la même manière sur les lignes de la matrice identité en parallèle :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad -L_2 \leftrightarrow -L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pensez à faire une vérification rapide au brouillon, ou dans votre tête. Cela vous prend 30 secondes, et permet de partir sur des bases saines.

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-4)^n & (-4)^n \\ (-1)^n & -(-4)^n & 0 \\ (-1)^n & 0 & -(-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2(-4)^n & (-1)^n - (-4)^n & (-1)^n - (-4)^n \\ (-1)^n - (-4)^n & (-1)^n + 2(-4)^n & (-1)^n - (-4)^n \\ (-1)^n - (-4)^n & (-1)^n - (-4)^n & (-1)^n + 2(-4)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vous pouvez ici aussi vérifier vos calculs, en explicitant A^0 (égal à I) et A^1 (égal à A).

(b) On a déjà montré que $J^2 = 3J$, puis $J^3 = 3J^2 = 9J$. Une récurrence immédiate amène, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$. Ainsi, puisque I et J commutent, d'après la formule du binôme, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n = (J-4I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(-4)^{n-k}I^{n-k} &= (-4)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-4)^{n-k}\right)J \\ &= (-4)^n I - \frac{1}{3}(-4)^n J + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-4)^{n-k}\right)J \\ &= (-4)^n I - \frac{1}{3}(-4)^n J + \frac{1}{3}(3-4)^n J = (-4)^n I - \frac{1}{3}(-4)^n J + \frac{1}{3}(-1)^n J. \end{aligned}$$

Une petite comparaison rapide montre qu'il s'agit bien du résultat trouvé plus haut. Le résultat, démontré seulement pour $n \in \mathbb{N}^*$, est encore vrai pour $n = 0$.

(c) D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un polynôme Q et un polynôme R de degré au plus 1, tels que

$$X^n = (X^2 + 5X + 4)Q + R.$$

Notons $R = aX + b$. Alors :

$$X^n = (X+1)(X+4)Q + aX + b.$$

En évaluant cette expression en -1 et en -4, il vient :

$$(-1)^n = -a + b \qquad \text{et} \qquad (-4)^n = -4a + b.$$

Ainsi,

$$a = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n \qquad \text{et} \qquad b = \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n.$$

En évaluant l'égalité de division euclidienne au polynôme A, puisque $X^2 + 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= \left(\frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n\right) A + \left(\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n\right) I \\ &= \left(\frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n\right)(J - 4I) + \left(\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n\right) I \\ &= \left(\frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(-4)^n\right) J + (-4)^n I. \end{aligned}$$

Encore une fois, on retrouve le même résultat.

5. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}.$$

(a) On explicite la fonction F_a. Un calcul rapide montre que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_a(x,y) = -3x^2 - 3y^3 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay.$$

Ainsi, F_a est une fonction polynomiale en les variables x et y, donc elle de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles sont, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

- $\dfrac{\partial F_a}{\partial x}(x,y) = -6x + 2(y+a)$
- $\dfrac{\partial F_a}{\partial y}(x,y) = -6y + 2(x+a)$.

(b) On a donc, en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla F_a(x,y) = \begin{pmatrix} -6x + 2(y+a) \\ -6y + 2(x+a) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, ∇F_a est nul en (x_0, y_0) si et seulement si

$$6x_0 - 2y_0 = 2a \qquad \text{et} \qquad 6y_0 - 2x_0 = 2a.$$

On obtient $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, et

$$F_a\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = -2a^2.$$

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} G_a(x,y) &= -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay + \frac{1}{3}(9x^2 + y^2 + a^2 - 6xy - 6ax + 2ay) + 2a^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}ay = -\frac{2}{3}(4y^2 - 4ay + a^2) = -\frac{2}{3}(2y-a)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, G_a est négatif.

(d) On déduit du calcul précédent que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_a(x,y) = -\frac{1}{3}(3x-y-a)^2 - 2a^2 - \frac{2}{3}(2y-a)^2.$$

Ainsi, par positivité des carrés, on a toujours

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_a(x,y) \leqslant -2a^2.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $2y = a$ et $3x - y - a = 0$, donc si $x = y = \frac{a}{2}$ Ainsi, le point $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ correspond à un maximum (local et global) de la fonction F_a, et on trouve $M(a) = -2a^2$.

La fonction F_a ne peut admettre d'autre extremum (localou global) puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sont gradient est non nul en tout autre point.

(e) La fonction M est une fonction parabolique concave, elle admet donc un unique extremum (le sommet de la parabole). Ici, il s'agit d'un maximum, atteint en $a = 0$.

(f) La fonction f admet un unique maximum global, atteint au point $(0,0,0)$. En effet, $f(0,0,0) = 0$, et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ différent de $(0,0,0)$:
- si $z \neq 0$, alors $f(x,y,z) \leqslant M(z) = -2z^2 < 0$;
- si $z = 0$, alors $(x,y) \neq (0,0)$, et comme F_0 admet un unique maximum $M(0)$ atteint au point $(0,0)$,

$$f(x,y,z) < M(0) = 0.$$

Problème – (extrait et adapté de ESSEC 1993)

Partie I – Étude d'intégrales

1. (a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit u et v les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u(t) = \frac{t^{2p+1}}{2p+1} \qquad \text{et} \qquad v(t) = (1-t^2)^q.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, et pour tout $t \in [0,1]$,

$$u'(t) = t^{2p} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = -2qt(1-t^2)^{q-1}.$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$I(p,q) = \int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2p+1}\Big[t^{2p+1}(1-t^2)^q\Big]_0^1 + \frac{2q}{2p+1}\int_0^1 t^{2p+2}(1-t^2)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2q}{2p+1} I_{p+1,q-1}.$$

(b) On obtient donc, en itérant cette relation :

$$I(p,q) = \frac{(2q)(2q-2)(2q-4)\dots 2}{(2p+1)(2p+3)\dots(2p+2q-1)} I_{p+q,0} = \frac{2^q q! \cdot (1\cdot 3 \cdots (2p-1))}{1 \cdot 3 \cdots (2p+2q-1)} I_{p+q,0}.$$

Or,

$$1 \cdot 3 \cdots (2p-1) = \frac{(2p)!}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} = \frac{(2p)!}{2^p p!},$$

et de même

$$1 \cdot 3 \cdots (2p+2q-1) = \frac{(2p+2q)!}{2^{p+q}(p+q)!}.$$

On obtient donc, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I(p,q) = \frac{2^{2q} q!(2p)!(p+q)!}{p!(2p+2q)!} I_{p+q,0}.$$

De plus,

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{2p+2q}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2p+2q+1}.$$

Ainsi,

$$I(p,q) = \frac{2^{2q} q!(2p)!(p+q)!}{p!(2p+2q+1)!}$$

En particulier,

$$J(p) = I(p,p) = \frac{4^p p!((2p)!)^2}{p!(4p+1)!} = \frac{4^p}{4p+1}\frac{1}{\binom{4p}{2p}}.$$

(c) Soit $f : t \mapsto t^2(1-t^2)$ sur $[0,1]$. On a, en posant $u = t^2$, parcourant $[0,1]$:

$$f(t) = u(1-u).$$

Il s'agit d'une fonction parabolique, admettant un maximum pour $u = \frac{1}{2}$, égal à $\frac{1}{4}$. Ainsi, f admet un maximum en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, égal à $\frac{1}{4}$; De plus, f est positive sur $[0,1]$. Ainsi, par positivité de l'intégrale,

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant J(p) = \int_0^1 (t^2(1-t^2))^p\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^p\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4^p}.$$

2. (a) On a $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^1 = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4}.$

(b) On effectue dans l'intégrale définissant $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$ le changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$ défini par :

$$t = \frac{ax-1}{x+a}, \qquad \text{donc:} \qquad \mathrm{d}t = \frac{a(x+a)-(ax-1)}{(x+a)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{a^2+1}{(x+a)^2}\ \mathrm{d}x.$$

De plus, $(x+a)t = ax-1$, donc $x(a-t) = 1+at$, donc $x = \dfrac{1+at}{a-t}$ (utile pour déterminer les bornes de l'intégrale). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{a-1}{a+1}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{(a^2+1)\ \mathrm{d}x}{(x+a)^2\left(1+\left(\frac{(ax-1)}{x+a}\right)^2\right)} \\
&= (a^2+1)\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{dx}{x^2+2ax+a^2+a^2x^2-2ax+1} = (a^2+1)\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{dx}{(a^2+1)(x^2+1)} \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{x^2+1} = f(1) - f(a).
\end{aligned}$$

(c) On fait cette fois un changement de variables affine $x = at$, soit $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{a}$. On obtient donc

$$f(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}.$$

Partie II – Étude d'une suite de polynômes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $-a^2$ est racine de P_n si et seulement si

$$1 + \lambda_n(-a^2)^n(1+a^2)^n = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n}(1+a^2)^n}.$$

2. (a) • On a $\lambda_0 = -1$, donc $P_0 = 0$. Ainsi, $Q_0 = 0$.

- On a $\lambda_1 = \dfrac{1}{a^2(1+a^2)}$, donc

$$P_1 = 1+\frac{1}{a^2(1+a^2)}X(1-X) = \frac{1}{a^2(1+a^2)}(-X^2+X+a^2(1+a^2)) = \frac{1}{a^2(1+a^2)}(X+a^2)(-X+(1+a^2)).$$

Ainsi, $Q_1 = \dfrac{1}{a^2(1+a^2)}(-X+(1+a^2))$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} - P_n &= \lambda_{n+1}(X(1-X))^{n+1} - \lambda_n(X(1-X))^n = -\frac{\lambda_n}{a^2b}(X(1-X))^{n+1} - \lambda_n(X(1-X))^n \\
&= \lambda_n(X(1-X))^n\left(\frac{X(1-X)}{a^2b} - 1\right) = \lambda_n(X(1-X))^n\frac{X^2-X-a^2(1+a^2)}{a^2(1+a^2)} \\
&= -\lambda_n(X(1-X))^nP_1 = \left(-\frac{X(1-X)}{a^2b}\right)^n P_1.
\end{aligned}$$

En divisant cette relation par $X+a^2$, on obtient :

$$Q_{n+1} - Q_n = (-\frac{X(1-X)}{a^2b})^nQ_1.$$

Partie III – Détermination de valeurs approchées de π

1. **Une première approximation de π**

(a) On sait que $Q_1 = \frac{1}{a^2b}(b-X)$. Ainsi,

$$u_1(a) = \frac{1}{ab}\int_0^1 (b-t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{ab} = \frac{3b-1}{3ab}.$$

(b) Puisque $a \geqslant 1$ d'après l'énoncé, pour tout $t \in [0,1], t^2+a^2 > 0$. On a donc, pour tout $t \in [0,1]$,

$$Q_2(t^2) = \frac{P_2(t^2)}{t^2+a^2},$$

et par conséquent,

$$u_2(a) = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)\ \mathrm{d}t}{a^2+t^2}$$

Or, d'après I-2(c),

$$f(a) = a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2) - \lambda_2 t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\ \mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $a^2 \leqslant a^2+t^2 \leqslant a^2+1 = b$. Ainsi, puisque $t^4(1-t^2)^2 \geqslant 0$, et puisque $\lambda_2 \leqslant 0$, on obtient, par positivité de l'intégrale :

$$-a\lambda_2\frac{J(2)}{b} \leqslant -a\int_0^1 \lambda_2\frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant -a\lambda_2\frac{J(2)}{a^2}.$$

Puisque $\lambda_2 = -\dfrac{1}{a^4b^2}$ d'après II-1, il vient

$$\frac{J(2)}{a^3b^3} \leqslant -a\int_0^1 \lambda_2\frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{J(2)}{a^5b^2}.$$

Ainsi, en utilisant l'expression ci-dessus de $f(a)$, ainsi que l'expression de $u_2(a)$, il vient :

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3b^3} \leqslant f(a) \leqslant u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5b^2}.$$

(c) Cet encadrement dit donc que $u_2(a)$ est une valeur approchée de $f(a)$ à $\dfrac{J(2)}{a^5b^2}$ près. Or, d'après I-1c,

$$0 \leqslant J(2) \leqslant \frac{1}{2^4},$$

et par conséquent :

- pour $a=2$ (et donc $b=5$), l'erreur est donc majorée par $\frac{1}{2^9 5^2} \leqslant \frac{1}{25\cdot 500} \leqslant 10^{-4}$;
- pour $a=3$ (et donc $b=10$), l'erreur est majorée par $\frac{1}{2^4 3^5 10^2} \leqslant 10^{-4}$ (majoration très grossière !)

Ainsi, $u_2(2)+u_2(3)$ est une valeur approchée de $f(2)+f(3)$ à $2\cdot 10^{-4}$ près, et donc $4(u_2(2)+u_2(3))$ donne une valeur approchée de $4(f(2)+f(3))$ à $8\cdot 10^{-4}$ près, donc à 10^{-3} près.

Or, d'après la question I-2(b) et la question I-2(a),

$$4(f(2)+f(3)) = 4f(1) = \pi,$$

d'où le résultat.

2. **Une approximation plus fine**

(a) On a de même que plus haut, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n(a)-f(a)| = \left| a\int_0^1 \frac{P_n(t^2)}{a^2+t^2} - a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}\right| = a\left|\int_0^1 \frac{\lambda_n t^{2n}(1-t^2)^n}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\right| = a|\lambda_n|\int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{t^2+a^2},$$

par positivité de l'intégrande. Ainsi, en majorant comme précédemment $\dfrac{1}{t^2+a^2}$ par $\dfrac{1}{a^2}$, il vient :

$$|u_n(a)-f(a)| \leqslant a|\lambda_n|\frac{J(n)}{a^2} = \frac{1}{a^{2n+1}b^n}.$$

En utilisant le majorant de $J(n)$ trouvé en I-1(c), il vient alors :

$$|u_n(a)-f(a)| \leqslant \frac{1}{(4a^2b)^n a}.$$

(b) On obtient donc :

- $|u_5(2)-f(2)| \leqslant \dfrac{1}{80^5\cdot 2} = \dfrac{1}{10^5 2^{16}} \leqslant \dfrac{1}{10^5 10^3 2^6} \leqslant 10^{-9}$, car $2^{10}=1024 \geqslant 1000$.
- $|u_5(3)-f(3)| \leqslant |u_5(2)-f(2)| \leqslant 10^{-9}$,

Donc,

$$|4(u_5(2)+u_5(3))-\pi| = |4(u_5(2)+u_5(3))-4f(1)| = |4(u_5(2)+u_5(3))-4(f(2)+f(3))| \leqslant 8\cdot 10^{-9} \leqslant 10^{-8}.$$

3. **Programmation**

(a) D'après II-2(b), on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}(a)-u_n(a) &= a\int_0^1 (Q_{n+1}(t^2)-Q_n(t^2))\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n a}{(a^2b)^n}\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^n Q_1(t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^n (b-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}(bJ(n)-I(n+1,n)). \end{aligned}$$

Or, d'après la partie I,

$$I(n+1,n) = \frac{4^n n!(2n+2)!(2n+1)!}{(n+1)!(4n+3)!} = J(n)\cdot\frac{(2n+1)^2(2n+2)}{(n+1)(4n+2)(4n+3)} = J(n)\cdot\frac{2n+1}{4n+3}.$$

Ainsi, on obtient

$$u_{n+1}(a)-u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}\cdot J(n)(b-\frac{2n+1}{4n+3}) = \frac{(-1)^n aJ(n)}{(a^2b)^{n+1}}\cdot\frac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3}.$$

(b) Soit $n \geqslant 1$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} &= -\frac{1}{a^2b}\cdot\frac{J(n+1)}{J(n)}\cdot\frac{2(2b-1)(n+1)+7b-5}{2(2b-1)n+3b-1}\cdot\frac{4n+3}{4n+7}\\ &= -\frac{1}{a^2b}\cdot\frac{4(2n+1)^2(2n+2)^2}{(4n+2)(4n+3)(4n+4)(4n+5)}\cdot\frac{2(2b-1)n+7b-5}{2(2b-1)n+3b-1}\cdot\frac{4n+3}{4n+7}\\ &= -\frac{1}{a^2b}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+5)(4n+7)}\cdot\frac{2(2b-1)n+7b-5}{2(2b-1)n+3b-1}.\end{aligned}$$

(c) • La question précédente nous donne une relation de récurrence satisfaite par la suite $(v_n(a))$. De plus :

$$v_0(a) = u_1(a) - u_0(a) = u_1(a) = \frac{3b-1}{3ab},$$

puisque $Q_0 = 0$. Ainsi, on obtient une expression un peu longue mais sans difficulté :

```
function vn(n:integer;a:real): real;

var b,v:real;
    i:integer;

begin
 b:=a*a+1;

     {initialisation de la suite v pour v_0}

 v:=(3*b-1)/(3*a*b);

 for i:=1 to n do

    {actualisation de la valeur: de v_(i-1) à v_i.
      On le fait en deux étapes pour des problèmes de longueur de ligne}

  begin
     v:= v* (-1/(a*a*b))*(2*n+1)*(2*n+2)/((4*n+5)*(4*n+7));
     v:= v*((4*b-2)*n+7*b-5)/((4*b-2)*n+3*b-1);
  end;

     {définition de la valeur de sortie de la fonction}

 vn:=v;

end;
```

• Puisque $u_1(a) = v_0(a)$, on a directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(a),$$

d'où la fonction suivante pour le calcul de $u_n(a)$.

```
function un(n:integer; a:real):real;

var u:real;
```

```
    k:integer;

  begin
    u:=v(0,a);
    for k:=1 to (n-1) do
      u:=u+v(k,a);
    un:=u;
  end;
```

Vous remarquerez que cet algorithme est très mauvais (mais c'est la faute de l'énoncé), car il ait calculer successivement les valeurs de $v(k, a)$, sans reprendre à chaque fois le résultat précédent (pour chaque nouvelle valeur de k, il reprend le calcul à $v(0, a)$). Pour un algorithme plus efficace, il faudrait sommer les termes au fur et à mesure qu'ils sont calculés, donc ne pas dissocier les deux fonctions. Ceci dit, pour les calculs en petits indices qui nous interessent, cela ne change pas beaucoup de chose.

- D'après la question III-2(b), on peut directement écrire :

```
begin
  write(4*(un(5,2)+un(5,3)),'est une valeur approchée de pi à 1E-8 près');
end.
```