Correction du Devoir Surveillé n° 2

Exercice 1 – (Exercice technique)

1. Séries numériques

(a) On a :

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}} = e^{\frac{1}{\sin(1/n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Un très rapide calcul d'équivalent montre que cette expression admet e pour limite en $+\infty$, donc le terme général de la série tend vers 0. Ainsi, la série n'est pas grossièrement divergente.

De plus, au voisinage de $+\infty$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De plus,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\sin(1/n)} = n\left(1 + \frac{1}{6n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n + \frac{1}{6n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right);$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin(1/n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(1/n),$$

puis

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}} = e\left(1 + \frac{1}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, le terme général de la série est équivalent à $\frac{e}{2n}$, terme général *positif* d'une série de Riemann divergente. Ainsi, le terme général de la série considérée est aussi positif, au moins à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}} - e \right)$ est divergente.

(b) On a $\frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{3}{(n-3)!}$.

Or, $\sum \frac{3}{(n-3)!}$ est convergente en tant que série exponentielle (de paramètre 1). Donc, comme elle à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!}$ est aussi à terme positifs, au moins à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs par équivalences, elle est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3n^3 - 2n^2 + n - 1 = 3n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + 2n - 1.$$

Ainsi, toutes les sommes étant convergentes en tant que sommes exponentielles,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Les premiers termes de chacune de ces séries (sauf la dernière) sont nuls, et il reste donc, après suppression de ces termes nuls :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!} &= 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 7 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

par simplification des termes supérieurs des factorielles. On termine par des changements d'indices, amenant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 11e.$$

- (c) Tout d'abord, $\frac{n^3}{3^n} \sim \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}$, et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}$ converge en tant que série s'écrivant d'ordre 3 de la série géométrique (série du binôme négatif), de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Les séries étant à termes positifs, on en déduit la convergence de $\sum \frac{n^3}{3^n}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^3 = (n+1)(n+2)(n+3) - 6n^2 - 11n - 6 = (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7(n+1) - 1.$$

Ainsi, puisque toutes ces séries convergent en tant que séries du binôme négatif, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{6}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^4} - 6 \cdot \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} + 7 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{243}{8} - \frac{81}{2} + \frac{63}{4} - \frac{3}{2} = \frac{243 - 324 + 126 - 12}{8} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

2. Développements limités

- (a) Au voisinage de 0, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{+\infty}(x^5),$$

donc

$$\begin{aligned} \ln(1 + \cos x) &= \ln \left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{+\infty}(x^5) \right) \\ &= \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o_{+\infty}(x^5) \right) \\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{16} + o(x^5) \\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5) \\ &= \ln 2 \left(1 - \frac{x^2}{4 \ln 2} - \frac{x^4}{96 \ln 2} \right) + o(x^5) \end{aligned}$$

On inverse cela, et on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1 + \cos x)} &= \frac{1}{\ln 2} \left(1 + \frac{x^2}{4 \ln 2} + \frac{x^4}{96 \ln 2} + \frac{x^4}{16 \ln^2 2} \right) + o(x^5) \\ &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{x^2}{4 \ln^2 2} + \left(\frac{1}{96 \ln^2 2} + \frac{1}{16 \ln^3 2} \right) x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

(b) On a, au voisinage de 0 :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Pour calculer le DL de l'Arctan, on peut déterminer (c'est facile) celui de sa dérivée, puis intégrer. Mais l'intégration de DL n'est en fait pas au programme. On peut s'en sortir à l'aide de la formule de Taylor-Young, du fait que Arctan est de classe $\mathcal{C}^3$. Il faut pour cela déterminer les dérivées successives de Arctan en 0. Pour cela, on va en fait calculer les dérivées successives de sa dérivée définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

Or, en identifiant avec le DL obtenu pour cette fonction par la formule de Taylor-Young (par unicité du DL), on obtient :

$$\text{Arctan}'(0) = 1, \quad \text{Arctan}''(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arctan}^{(3)}(0) = 2!(-1) = -2.$$

Comme de plus, $\text{Arctan}(0) = 0$, il vient, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

C'est la seule méthode que vous puissiez appliquer systématiquement pour intégrer un DL, à condition d'avoir les hypothèses de régularité nécessaires.

Pour l'arctangente, on peut utiliser une autre méthode, issue du fait qu'il s'agit de la réciproque de tan. Tout d'abord, étant de classe $\mathcal{C}^3$, Arctan admet un DL à l'ordre 3, d'après la formule de Taylor-Young. Comme $\text{Arctan } x = 0$, il n'y a pas de terme constant. Notons donc ce DL :

$$\text{Arctan } x = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3).$$

On a $\tan(\text{Arctan } x) = x$, donc, en composant ce DL avec celui de la tangente :

$$ax + bx^2 + cx^3 + \frac{a^3}{3}x^3 + o(x^3) = x.$$

On identifie (unicité du DL), et on obtient :

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -\frac{a^3}{3} = -\frac{1}{3}.$$

On retrouve donc le DL : $\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(\text{Arctan } x) - \ln(\tan x) &= \ln \frac{\text{Arctan } x}{\tan x} = \ln \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= \ln \left(\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + o(x^2) \right) = \ln \left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}x^2. \end{aligned}$$

3. Intégrales

(a) Posons, pour tout $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = (\ln x)^{-\ln x}$. La fonction f est bien définie sur cet intervalle, et y est continue. Donc l'intégrale n'a qu'une impropreté en $+\infty$. De plus, pour tout $x \geq 2$,

$$0 \leq x^2 (\ln x)^{-\ln x} = e^{2 \ln x - \ln x (\ln(\ln x))} = e^{\ln x (2 - \ln(\ln x))}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln(\ln x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{donc:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x (2 - \ln(\ln x))} = 0.$$

Ainsi, $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et, les fonctions étant positives, $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge, puisque $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, en tant que série de Riemann de paramètre 2, en la borne $+\infty$.

- (b) Soit, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{2x}}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale n'a qu'une impropreté, en $+\infty$. De plus,

$$x^2 f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0,$$

donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et comme dans la question précédente, les fonctions étant positives, on obtient la convergence de l'intégrale.

Effectuons un changement de variable $y = e^x = \varphi(x)$, $dy = e^x dx$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijective de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^x}{e^x + e^{3x}} e^x dx = \int_1^{+\infty} \frac{1 + y}{y(1 + y^2)} dy.$$

Cherchons a , b et c tels que

$$\forall y \neq 0, \quad \frac{1 + y}{y(1 + y^2)} = \frac{a}{y} + \frac{by + c}{y^2 + 1} = \frac{ay^2 + a + by^2 + cy}{y(y^2 + 1)}.$$

On trouve $a = 1$, $c = 1$ et $b = -1$. Ainsi,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} + \frac{-y + 1}{y^2 + 1} dy.$$

Soit $A > 1$ (on est obligé, car on se retrouve avec deux intégrales sur les trois qui divergent).

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{1}{y} + \frac{-y + 1}{y^2 + 1} dy &= \left[\ln y \right]_1^A - \frac{1}{2} \left[\ln(y^2 + 1) \right]_1^A + \left[\text{Arctan } y \right]_1^A \\ &= \ln A - \frac{1}{2} \ln(A^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln 2 + \text{Arctan } A - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{A^2}{A^2 + 1} + \text{Arctan } A + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$I = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

- (c) On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

- i. Les fonctions sh , ch et th sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, en tant que sommes, quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur (pour th) ne s'annulant pas (ch est strictement positif). On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x, \quad \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \text{th}'x = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2(x)}.$$

- ii. Puisque $\text{sh}' = \text{ch}$, sh' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On n'a aucune forme indéterminée pour le calcul des limites et on obtient directement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty.$$

- iii. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\text{ch}x| = \frac{|e^x + e^{-x}|}{2} \geq \frac{||e^x| - |e^{-x}||}{2} = \frac{|e^x - e^{-x}|}{2} = |\text{sh}x|,$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) \geq 0$, et donc $\text{th}' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, th est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}x = 1$.

iv. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4} ((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

v. La fonction $x \mapsto \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc on a deux improprietés, en $-\infty$ et en $+\infty$.

On a :

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, par comparaison aux deux bornes avec deux intégrales de Riemann convergentes (car de paramètre $\frac{3}{2} > 1$ en des bornes infinies), et par positivité des fonctions, on en déduit que l'intégrale est convergente.

On fait le changement de variable $x = \operatorname{sh} y$ (désolé, j'avais inversé x et y , mais les variables étant muettes...), donc $dx = \operatorname{ch} y \, dy$. Alors sh étant, d'après l'étude qui précède, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} y \, dy}{(1+\operatorname{sh}^2 y)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} y \, dy}{(\operatorname{ch}^2 y)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch}^2 y},$$

d'après la relation du (iv). Ainsi, d'après l'expression de la dérivée de th , et la relation (iv), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[\operatorname{th} y \right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = 1 - (-1) = 2.$$

Exercice 2 – (Éricome 2007)

1. Les développements usuels à l'ordre n utilisés ici sont, au voisinage de 0 :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{et} \quad \ln(1+y) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{y^k}{k} + o(x^n).$$

Ici, il vient donc

$$2 - e^x = 2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

D'où, par composition, le terme $-x - \frac{x^2}{2}$ étant bien de limite nulle :

$$\ln(2 - e^x) = \ln\left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Alors $\frac{1}{k} > 0$, donc $e^{\frac{1}{k}} > 1$, puis

$$2 - e^{\frac{1}{k}} < 1.$$

De plus, $k \geq 2$, donc $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$, donc $e^{\frac{1}{k}} \leq \sqrt{e}$, par croissance de l'exponentielle. Or,

$$e < 4 \quad \text{donc} \quad \sqrt{e} < 2 \quad \text{donc} \quad 2 - e^{\frac{1}{k}} > 0.$$

On a bien obtenu : $2 - e^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[$.

(b) Par conséquent,

$$\forall k \geq 2, \quad \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) < 0.$$

(c) Lorsque k tend vers $+\infty$, $\frac{1}{k}$ tend vers 0, et on peut donc utiliser le développement limité de la question 1, qui fournit l'équivalent suivant :

$$\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{k}.$$

Les séries $\sum \ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ et $\sum -\frac{1}{k}$ étant toutes deux à termes toujours négatifs (donc de signe constant), l'équivalent ci-dessus permet d'affirmer qu'elles sont de même nature. Or $\sum -\frac{1}{k}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre 1. Donc la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ est divergente.

- (d) La suite (V_n) est la somme partielle de la série de la question précédente. Les termes étant tous négatifs, (V_n) est décroissante, et elle ne converge pas vers une limite finie, puisque la série est divergente. Donc elle diverge vers $-\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty, \quad \text{puis:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. (a) Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right] &= \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k} \\ &= V_n - \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) \\ &= \ln u_n - \ln 1 + \ln n = \ln(nu_n), \end{aligned}$$

la dernière somme étant une somme télescopique.

- (b) On utilise le DL trouvé dans la question 1, valide ici puisque $\frac{1}{k}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ainsi, on obtient l'équivalent suivant : $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$.

- (c) Par conséquent, le membre de droite de cet équivalent étant de signe constant (négatif), il en est de même du membre de gauche, au moins à partir d'un certain rang, et les deux séries dont les termes généraux sont donnés par ces deux expressions équivalentes sont donc de même nature. Or, $\sum_{k \geq 2} -\frac{1}{2k^2}$

converge, en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc $\sum_{k \geq 2} \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ converge également.

Soit S la somme de cette série. On a donc, d'après la question 3(a),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(nu_n) = S \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = e^S, \quad \text{donc:} \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^S}{n},$$

Il suffit donc de poser $K = e^S > 0$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{K}{n}$ étant à termes positifs, elles ont même nature, du fait de l'équivalent ci-dessus. Or, $\sum \frac{K}{n}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $1 \leq 1$, donc $\sum u_n$ diverge.

4. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$.

- (a) La suite $(V_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles d'une série à terme général négatif, donc $(V_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Par croissance de la fonction exponentielle, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est aussi décroissante.

- (b) On a donc $(u_n)_{n \geq 2}$ décroissante positive, et de limite nulle. Ainsi :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0,$$

puisque $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante ;

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0,$$

puisque $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante ;

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1},$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$, puisque (u_n) est de limite nulle.

Ainsi, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

(c) Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant adjacentes, elles admettent une même limite finie ℓ . Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$:

- $\exists N_1 > 0, \forall n \geq N_1, |S_{2n} - \ell| < \varepsilon$
- $\exists N_2 > 0, \forall n \geq N_2, |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

Ainsi, pour tout $n \geq 2 \max(N_1, N_2)$, $|S_n - \ell| < \varepsilon$.

On en déduit que $(S_n)_{n \geq 2}$ admet une limite finie, donc que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

(d) Soit $n \geq 2$.

- Supposons que n est pair, et posons, $n = 2m$. Puisque (S_{2n}) est décroissante de limite $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k$, et que (S_{2n+1}) est croissante de même limite, on a :

$$S_{2m+1} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq S_{2m}.$$

Ainsi, en soustrayant S_{2m} , on obtient :

$$(-1)^{2m+1} u_{2m+1} \leq S_{2m+1} - S_{2m} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_{2m} \leq 0.$$

Or, $(-1)^{2m+1} u_{2m+1} = -u_{2m+1} \geq -u_{2m}$, car (u_n) est décroissante. Ainsi

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_n \right| \leq u_n.$$

- De la même façon, si n est impair, on peut écrire $n = 2m + 1$, et on obtient

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_{2m+1} \leq S_{2m} - S_{2m+1} = -(-1)^{2m+1} u_{2m+1} = u_{2m+1},$$

d'où :

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_n \right| \leq u_n.$$

Cette majoration est donc valable pour tout n . Ainsi, pour tout $n \geq 2$, u_n est un majorant de l'erreur faite en approchant la somme de la série par sa somme partielle S_n . On obtient donc la fonction suivante, dans laquelle on calcule conjointement la suite (V_n) et la somme partielle (S_n) .

```

fonction somme(e:real):real;

var u,v,S:real;
    k:integer;

begin
  if e<=0 then {test de cohérence: e doit être positif}
    begin
      writeln('erreur');
      halt;
    end;
  v:=0; {initialisation de la suite V}
  S:=0; {initialisation de la somme partielle}
  k:=1; {initialisation de l'indice k}
  repeat
    k:=k+1; {on incrémente k: le premier indice
             considéré sera bien k=2}
    v:= v + \ln(2-exp(1/k)); {calcul du terme suivant de la suite (V_k)}
    u:=exp(v); {calcul de u_k}
    if (k mod 2) = 0 {calcul de la somme partielle, en distinguant
  
```

```

                                suivant la parité, pour avoir le bon signe}
    then S:=S+u
    else S:=S-u;
until
    u<e;                                {condition d'arrêt d'après ce qui précède}
    somme:=S;
end;

```

Problème – (d'après EM Lyon 2006)

Partie I – Préliminaires

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les croissances comparées, t^2 étant de limite $+\infty$ en $+\infty$, on a

$$e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \right) \quad \text{donc:} \quad t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Remarque : être très précis dans une question de ce type, qui est une application très directe du cours !

- (b) La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$. On a donc deux impropretés en $-\infty$ et $+\infty$. De plus, cette fonction étant paire si n est paire, et impaire si n est impaire, l'intégrale sera de même nature en chacune des deux bornes. Il suffit donc de montrer la convergence pour la borne $+\infty$. Or, d'après la question 1(a),

$$t^n e^{-t^2} = o \left(\frac{1}{t^2} \right),$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ au voisinage d'une borne infinie, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, d'après le théorème de comparaison d'intégrales par négligeabilité au voisinage d'une borne, les fonctions étant positives au voisinage de cette borne, puis que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, d'après l'argument qui précède.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, ainsi, P est une combinaison linéaire (finie) de monômes X^n , donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est une combinaison linéaire d'intégrales telles que dans la question 1(b), toutes convergentes. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.

3. On a :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(il s'agit de l'intégrale de Gauss). De plus, l'intégrale I_1 étant convergente, on peut faire son calcul directement sur l'intégrale impropre, toutes les limites que nous sommes amenés ainsi à écrire existant :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = 0.$$

On aurait aussi pu dire directement que la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, et l'intégrale convergente, d'où le résultat.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt.$$

On pose les fonctions u et v , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = t^{n+1}, \quad \varepsilon u'(t) = (n+1)t^n, \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}, \quad v'(t) = te^{-t^2}.$$

De plus, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, on peut faire une intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et on obtient :

$$I_{n+2} = \left[u(t)v(t) \right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} + \frac{n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{n+1}{2} I_n.$$

5. Soit on propage l'égalité $I_1 = 0$ de deux en deux, en utilisant la relation de récurrence ci-dessus, soit on constate directement qu'il s'agit d'intégrales convergentes de fonctions impaires.
6. Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi}$.

Pour $p = 0$, on a bien

$$\frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{1}{1 \cdot 1} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} = I_0.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai. Alors, d'après la question I-4,

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p)!(2p+1)}{2 \cdot 2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p)!(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1) \cdot 2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \sqrt{\pi}$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est aussi vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}$.

7. La seule subtilité est de bien distinguer les valeurs paires et les valeurs impaires du paramètre. Ainsi, on obtient la fonction suivante :

```

function In(n:integer):real;

var I:real;
    m,k:integer;

begin
  if (n mod 2)=1
  then
    In:=0
  else
    begin
      m:=n div 2;
      I:= sqrt(pi);
      for k:= 1 to m do
        I:= (2*k-1)*I/2;
      In:=I;
    end;
  end;
end;

```

Partie II – Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad |t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq |t|e^{-t^2} = te^{-t^2}.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent absolument, donc convergent, par comparaison avec les intégrales convergentes I_0 et I_1

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée seconde est $-\sin$, dont la valeur absolue est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et λ , on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2} \cdot 1 = \frac{\lambda^2}{2}.$$

3. (a) Soit maintenant $h \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, et on pose $\lambda = ht$ et $a = xt$ dans l'inégalité de la question précédente. En divisant par la quantité positive $|h|$ et en la multipliant par e^{-t^2} , on obtient alors :

$$\left| \frac{\sin(xt + ht)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$, en utilisant la linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales impropres étant convergentes) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &= \left| \frac{\int_0^{+\infty} \sin((x+h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt}{h} - \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right) dt \right| \end{aligned}$$

Or, on a vu que

$$\left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2},$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2} dt$ est convergente (il s'agit de $\frac{|h|}{2} I_2$), donc, par comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right) dt$$

est absolument convergente, et on peut donc utiliser l'inégalité triangulaire. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{|h|}{2} \cdot I_2. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est de limite nulle lorsque h tend vers 0, donc, d'après le théorème de majoration,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

- (b) Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissement en x de S admet une limite en 0, égale à $C(x)$. Donc S est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = C(x).$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par parties sur $C(x)$, en posant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u(t) = \cos(xt), \quad u'(t) = -x \sin(xt), \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}, \quad v'(t) = te^{-t^2}.$$

On a une seule impropriété en $+\infty$, et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \cos(xt)e^{-t^2} = 0.$$

Ainsi, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale improprie, et on obtient :

$$C(x) = \left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \cdot S(x).$$

- (b) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$. La fonction g est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}S'(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}C(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)\right) \\ &= e^{\frac{x^2}{4}}.\end{aligned}$$

Ainsi, g est une primitive de $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$. De plus,

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0)e^{-t^2} dt = 0, \quad \text{donc:} \quad g(0) = 0.$$

Ainsi, g est la primitive de $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ s'annulant en 0, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = g(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dx.$$

- (c) On en déduit, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt,$$

puis, en utilisant la question II-4(a) :

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Partie III – Obtention d'un développement limité

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, les deux seules impropriétés sont en $+\infty$ et $-\infty$. De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} \leq e^{-t^2},$$

et l'intégrale $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente. Donc, par théorème de comparaison de la nature d'intégrales de fonctions positives, il vient que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} dt$ converge.

2. (a) D'après les règles de sommation des termes d'une suite géométrique, puisque u ne prend pas la valeur -1 , on a :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{1 - (-u)^3}{1+u} - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}.$$

Puisque $u \geq 0$ et $1+u \geq 1$, on obtient immédiatement l'encadrement :

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $u = x^2t^2$, il vient :

$$0 \leq (1 - x^2t^2 + x^4t^4) - \frac{1}{1+x^2t^2} \leq x^6t^6,$$

et, en multipliant par $e^{-t^2} > 0$, et en intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$, les intégrales étant toutes convergentes d'après la question I-2 et la question III-1, on obtient :

$$\begin{aligned}0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2} dt - g(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} t^6x^6e^{-t^2} dt = x^6I_6 = x^6\frac{6!}{2^63!}\sqrt{\pi} \cdot x^6 \\ &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2^6}\sqrt{\pi} \cdot x^6 = \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi} \cdot x^6.\end{aligned}$$

(c) Ainsi, au voisinage de 0, puisque $x^6 = o(x^5)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} + o(x^5) \\ &= I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 + o(x^5) = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x^4 \right) + o(x^5). \end{aligned}$$

Partie IV – Nature d'une série

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est positive, et

$$\frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^{2p-2} e^{-t^2}.$$

Ainsi, si $p \neq 0$, la convergence de I_{2p-2} amène celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

De plus, si $p = 0$, on obtient l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} dt = g(1)$, donc convergente aussi.

2. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$t^2 + (2p)! \geq (2p)!, \quad \text{donc:} \quad 0 \leq \frac{1}{t^2 + (2p)!} \leq \frac{1}{(2p)!}.$$

Ainsi, les intégrales étant toutes convergentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$0 \leq u_p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt = \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{4^p p!} \sqrt{\pi}$$

Or, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{4^p p!}$ converge, en tant que série exponentielle de paramètre $\frac{1}{4}$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_p$ étant à termes positifs, on en déduit que $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$ converge.

3. Plus généralement, étant donné $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_p x^p| \leq \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{4} \right)^p \cdot \sqrt{\pi},$$

et comme la série $\sum \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{4} \right)^p$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre $\frac{x}{4}$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la convergence absolue, donc la convergence de la série $\sum u_p x^p$.