Lycée La Bruyère, Versailles — Samedi 21 octobre 2009.
ECS 2 – Mathématiques

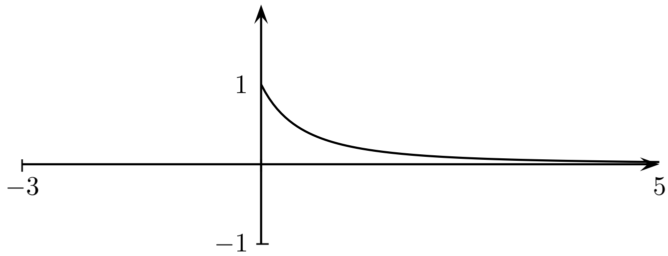
**Correction du Devoir Surveillé n° 3**

**Exercice 1** – (d'après EM Lyon 2005 option Eco)

1. La fonction $f$ est constante sur $]-\infty, 0]$, et décroissante sur $[0, +\infty[$, par composition de la fonction croissante $t \mapsto (1+t)^2$ à valeurs dans $[1, +\infty[$, et de la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$, décroissante sur $[1, +\infty[$. On obtient donc les variations suivantes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $0$ ‖ $1$ | $\searrow$ | $0$ |

On obtient la courbe représentative suivante de $f$ :




2. La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2},$$
par un changement de variable $u = 1+t$. Il s'agit donc d'une intégrale de Riemann de paramètre 2 en $+\infty$, donc convergente. De plus :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\lim_{+\infty}} = 1.$$
Ainsi, $f$ est bien une densité de probabilité.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et que $]-\infty, x[ \subset ]-\infty, +\infty[$, on en déduit la convergence de $\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors
   $$\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0.$$
   - Si $x > 0$, alors
   $$\int_{-\infty}^{x} ft)\ \mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{1+t}\Big]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

4. Ainsi, pour tout $\alpha > 0$, on a les équivalences suivante :
$$\int_0^{\alpha} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1 + \alpha = 2 \Longleftrightarrow \alpha = 1.$$

5. (a) On a :
$$\varphi_x(0) = \int_x^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$
De plus, par définition de la valeur d'intégrales convergentes et c'est le cas ici) :
$$\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u) = \lim_{u \to +\infty} \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1.$$

(b) Attention, comme $f$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas utiliser la propriété de dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes. Raisonnons directement, en considérant $0 \leqslant u < v$. On a alors

$$\varphi_x(v)-\varphi_x(u) = \int_{x-v}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'après la relation de Chasles. Ainsi,

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f$ est positive, et $x-v < x-u$, $x+u < x+v$, on en déduit la positivité de $\varphi_x(v)$. De plus, $[x+u, x+v] \subset \mathbb{R}_+^*$, car $x \geqslant 0$, et sur cet intervalle $f$ est donc continue, positive et non identiquement nulle (elle est strictement positive), donc $\displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$. Ainsi,

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) > 0.$$

D'où la stricte croissance de $\varphi_x$.

(c) Montrons que $\varphi_x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On pourrait utiliser les propriétés des intégrales dépendant de leurs bornes, en distinguant les cas $u < x$ et $u > x$, pour éviter le défaut de continuité de $f$ en 0, et en regardant la valeur $u = x$ à part. Je propose ici une démonstration directe par majorations, en remarquant que $|f|$ est majorée par 1. On a alors, pour tout $0 \leqslant u < v$,

$$|\varphi_x(v) - \varphi_x(u)| \leqslant \int_{x-v}^{x-u} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{x+u}^{x+v} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2(v-u).$$

Ainsi, en faisant tendre $v$ vers $u$, on obtient :

$$\lim_{v \to u^+} \varphi_x(v) = \varphi_x(u).$$

De même, en inversant le rôle de $u$ et $v$, si $u > 0$, on obtient :

$$\lim_{v \to u^-} \varphi_x(v) = \varphi_x(u).$$

Ainsi, $\varphi_x$ est bien continue en $u$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. Comme ell est définie uniquement sur $[0, +\infty[$, cela suffit à obtenir la continuité sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction $\varphi_x$ est donc continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $\varphi_x(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u) = 1$. D'après le théorème de la bijection, $\varphi_x$ se corestreint donc en une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$. Comme $\frac{1}{2} \in [0,1[$, cet élément a une unique image réciproque par $\varphi_x$ dans $[0, +\infty[$. Ainsi, l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue $u$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

6. (a) Tout d'abord, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $1 - x \in \mathbb{R}_+$. Par unicité de $U(x)$, il suffit alors de vérifier que $\varphi_x(1-x) = \frac{1}{2}$. Or :

$$\varphi_x(1-x) = \int_{x-1+x}^{x+1-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2x-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et comme $2x - 1 \leqslant 0$, et que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$, il reste :

$$\varphi_x(1-x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

d'après la question 4. Donc $U(x) = 1 - x$.

(b) On procède de même. Soit $x \geqslant \frac{1}{2}$. Alors $\sqrt{4+(x+1)^2}-2 \geqslant \sqrt{4}-2 = 0$, donc $\sqrt{4+(x+1)^2}-2 \in \mathbb{R}_+$. Par unicité de $U(x)$, il suffit de vérifier que $\varphi_x(\sqrt{4+(x+1)^2}-2) = \frac{1}{2}$. Or :

$$\varphi_x(\sqrt{4+(x+1)^2}-2) = \int_{x-\sqrt{4+(x+1)^2}+2}^{x+\sqrt{4+(x+1)^2}-2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or,
$$((x+1)^2+4)-(x+2)^2 = x^2+2x+5-x^2-4x-4 = -2x+1 \leqslant 0,$$
puisque $x \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi,
$$((x+1)^2+4) \leqslant (x+2)^2, \qquad \text{donc:} \qquad x-\sqrt{4+(x+1)^2}+2 \geqslant 0.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned}\int_{x-\sqrt{4+(x+1)^2}+2}^{x+\sqrt{4+(x+1)^2}-2} f(t) = \int_{x-\sqrt{4+(x+1)^2}+2}^{x+\sqrt{4+(x+1)^2}-2} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} &= \frac{1}{x-\sqrt{4+(x+1)^2}+3} - \frac{1}{x+\sqrt{4+(x+1)^2}-1} \\ &= \frac{x+3+\sqrt{4+(x+1)^2}}{(x+3)^2-4-(x+1)^2} - \frac{(x-1)-\sqrt{4+(x+1)^2}}{(x-1)^2-4-(x+1)^2} \\ &= \frac{x+3+\sqrt{4+(x+1)^2}}{4x+4} - \frac{(x-1)-\sqrt{4+(x+1)^2}}{-4x-4} = \frac{2x+2}{4x+4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

7. (a) L'application $U$ coïncide sur l'ouvert $]0,\frac{1}{2}[$ avec une fonction polynomiale, donc continue ; $U$ est donc continue sur $]0,\frac{1}{2}[$, et aussi en 0, puisque $x \mapsto 1-x$ est continue en 0, et que $U$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, $U$ coïncide sur l'ouvert $]\frac{1}{2},+\infty[$ avec une fonction obtenue comme composée de fonctions continues, donc continue, ainsi, $f$ est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$. Enfin, un calcul rapide montre que
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} U(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} = \frac{1}{2} = U\left(\frac{1}{2}\right),$$
donc $U$ est continue en $\frac{1}{2}$. Ainsi, $U$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) De même, $U$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{1}{2}\}$, et
$$\forall x \in [0,\frac{1}{2}[, \quad U'(x) = -1, \qquad \forall x \in ]\frac{1}{2},+\infty[, \quad U'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4+(x+1)^2}}.$$
On a donc
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} U'(x) = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} U'(x) = -1.$$
Par conséquent, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $U$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $U$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en $\frac{1}{2}$, et :
$$U'_g\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \text{et} \qquad U'_d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}.$$
Ces dérivées n'étant pas égales, $U$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.
La demi-tangente à gauche est bien entendu d'équation $y = 1-x$. La demi-tangente à droite est d'équation $y = \frac{3x}{5}+\frac{1}{5}$.

(c) On effectue un développement limité de $U$ en la variable $\frac{1}{x}$, lorsque $x$ est au voisinage de $+\infty$ (donc $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0) :
$$\begin{aligned}U(x) = x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2 &= x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-2 \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}-\frac{1}{2x^2}\right)-2+o\left(\frac{1}{x}\right) = x-1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$
Ainsi, $y = x-1$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$, et comme $\frac{2}{x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

(d) On calcule la dérivée seconde :
$$\forall x \in ]\frac{1}{2},+\infty[, U'(x) = \frac{x+1}{U(x)+2},$$

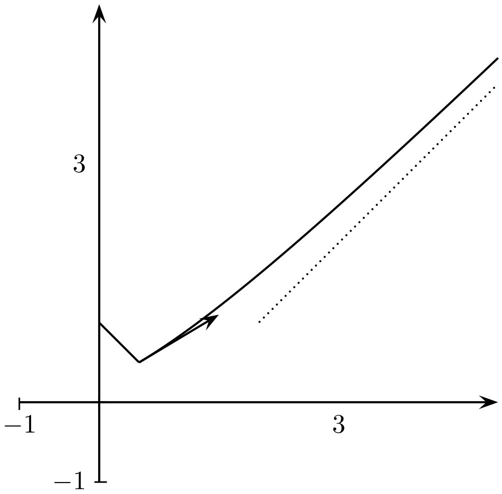



FIG. 1 – Graphe de $U$

donc

$$\forall x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, U''(x) = \frac{U(x)+2-(x+1)U'(x)}{(U(x)+2)^2} = \frac{U(x)+2-\frac{(x+1)^2}{U(x)+2}}{(U(x)+2)^2} = \frac{4}{(U(x)+2)^3} \geqslant 0.$$

Ainsi, $U$ est convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

(e) On obtient le graphe en figure 1

**Exercice 2** –

1. Montrons que $E$ un un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - On a évidemment $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   - Avec $P = 0$, on obtient $0 \in E$,
   - Soit $f$ et $g$ dans $E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x)\mathrm{e}^x.$$

     Ainsi,

     $$\forall x \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)(x) = (P(x) + \lambda Q(x))\mathrm{e}^x.$$

     Comme, d'après les régles sur les degrés, $P + \lambda Q$ est encore un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, il vient que $f + \lambda g$ est dans $E$.

   Ainsi, $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc c'est un espace vectoriel.
   De plus :
   - Soit $f \in E$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f = P \cdot \exp$. Notons :

     $$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0.$$

     Alors

     $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i(x).$$

     Par conséquent, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E$.
   - Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

     $$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \mathrm{e}^x = 0.$$

     Comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut simplifier par $\mathrm{e}^x$, et il vient

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0.$$

Ainsi, le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ admet une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls, et donc :

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre.

La famille $\mathcal{B}$ étant libre et génératrice de $E$, c'est une bas de $E$. Puisque cette base est de cardinal $n+1$, on obtient $\dim E = n+1$.

2. (a) Soit $f \in E$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

Tout d'abord, $D$ est bien définie, puisqu'une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f'(x) = (P'(x) + P(x))\mathrm{e}^x.$$

Comme $\deg P' \leqslant \deg P$, on a encore $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $f' \in E$. Ainsi, $D$ est bien définie de $E$ dans $E$.

De plus, pour tout $(f,g) \in E^2$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g).$$

Ainsi, $D$ est une application linéaire.

Par conséquent, $D$ est un endomorphisme de $E$.

(b) On a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D(b_i)(x) = b_i'(x) = (x^i + ix^{i-1})\mathrm{e}^x = b_i(x) + ib_{i-1}(x).$$

Ainsi, les coordonnées de $D(b_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$[D(b_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}$$

le terme 1 étant sur la ligne d'indice $i$ (la ligne supérieure étant d'indice 0, correspondant à l'indice de l'élément correspondant $b_0$ de la base $\mathcal{B}$)

De plus, si $i = 0$, $b_0 = \exp$, donc $D(b_0) = (b_0)$, et la colonne correspondante est contituée d'un 1 en première coordonnée, et des 0 partout ailleurs. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est carrée d'ordre $n+1$.

(c) La matrice de $D$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous non nuls, donc elle est inversible. Donc $D$ est un isomorphisme.

La matrice de $D$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ainsi, $D$ possède une unique valeur propre égale à 1. Or, $D$ n'est pas une homothétie (sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas de la forme $\lambda I_{n+1}$), donc $D$ n'est pas diagonalisable.

Nous venons de justifier que $\mathrm{Sp}(D) = \{1\}$. De plus, étant donné $f$ dans $E$, $f$ est dans le sous-espace propre $E_1$ associé à 1 si et seulement si $D(f) = f$. Or, soit $P$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x,$$
et par conséquent, $D(f) = f$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 0$, donc si $P$ est un polynôme constant.
Ainsi, $E_0 = \mathrm{Vect}(\exp)$, c'est la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle, c'est-à-dire par $b_0$.

3. (a) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi : $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f(b_j) = jb_{j-1}$, et $f(b_0) = 0$.

(b) En itérant ces relations, on trouve :
$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(b_j) = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)b_{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$
En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) On en déduit que :
$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{k!}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{(k+1)!}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{n!}{(n-k)!} \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } k \leqslant n$$
et $B^k = 0$ si $b > n$.

(d) Bien entendu, $B$ commute avec $I_{n+1}$, donc on peut utiliser la formule du binôme. Soit $k \leqslant n$. Alors
$$A^k = (B + I_{n+1})^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^\ell.$$
Je vous laisse donner la description matricielle de $A^k$, c'est plus facile avec un stylo qu'avec un ordinateur. Il reste dans cette matrice un coin supérieur droit constitué de 0.
Si $k > n$, cette fois, la somme précédente est tronquée, puisque les valeurs de $B^\ell$ sont nulles pour $\ell$ suffisamment grand. On remplit alors toute la partie supérieure de la matrice.

(e) Les coordonnées de $D^k(b_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont obtenues en multipliant la matrice $A$ par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, reprsentant les coordonnées de $b_n$ dans la base $\mathcal{B}$. Ce produit est égal à la dernière colonne de $A^k$.

- Ainsi, si $k \leqslant n$ :
$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \binom{k}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \\ \binom{k}{k-1} \frac{n!}{(n-k+1)!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1} \frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0} \frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k \leqslant n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, en notant $f_i$ la fonction $x \mapsto x^i$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad b_i^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \exp^{k-\ell}(x) f_n^{\ell}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

- Si $k > n$, tout se passe de même en tronquant la somme :

$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \binom{k}{n}\frac{n!}{0!} \\ \binom{k}{n-1}\frac{n!}{1!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1}\frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0}\frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k > n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, de même que plus haut, en constatant que les derniers termes apparaissant dans la somme sont nuls, car correspondent à une dérivée d'un polynôme, d'ordre supérieure à son degré.

4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que** $n = 5$.

(a) On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule $A^{-1}$ par la méthode du pivot, en faisant les mêmes opérations sur $I_{n+1}$ que celles qui permettent de passer de $A$ à $I_{n+1}$ :

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_5 \leftarrow \underset{\longrightarrow}{L_5} - 5L_6 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow \underset{\longrightarrow}{L_4} - 4L_5 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \quad \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \quad \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) La primitivation étant l'opération inverse de la dérivation, les coordonnées d'une primitive de $b_5$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 120 \\ -60 \\ 20 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une primitive de $b_5$ est la fonction $B_5$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_5(x) = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x.$$

(c) La seule impropreté de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ est en $-\infty$. Or, $\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^7}\right)$ au voisinage de $-\infty$, donc $x^5\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on obtient la convergence de l'intégrale. De plus

$$\int_{-\infty}^{0} x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x\Big]_{\lim -\infty}^{0} = -120 = -5!,$$

d'après les croissances comparées. On retouve la valeur de $\Gamma(6)$. En effet, en effectuant le changement de variables $y = -x$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{0} x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} y^5\mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = \Gamma(6).$$

5. C'est bien entendu une base de $E$ et non de $\mathbb{R}_n[X]$ qu'il faut trouver (sinon la question n'a clairement aucun sens) On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D(b_i) = b_i + ib_{i-1}$, donc $b_{i-1} = \frac{1}{i}(D(b_i) - b_i)$.
On recherche une base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; D(c_i) = c_i + c_{i-1}, \qquad \text{soit:} \qquad c_{i-1} = D(c_i) - c_i.$$

Posons par exemple $c_n = b_n$. Alors, d'après les relations ci-dessus, on doit nécessairement poser $c_{n-1} = nc_n$. Dans ce cas

$$c_{n-2} = D(c_{n-1}) - c_{n-1} = n(D(b_{n-1}) - b_{n-1}) = n(n-1)b_{n-2}.$$

En continuant ainsi, on peut donc poser, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ :

$$c_k = (k+1)(k+2)\dots nb_k.$$

Puisque $(b_0, \dots, b_n)$ est une base de $E$, et que $(c_0, \dots, c_n)$ est obtenu par multiplication par un coefficient non nul de chaque vecteur $b_i$, on en déduit que $(c_0, \dots, c_n)$ est une base de $E$. De plus,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad D(c_k) = D((k+1)\dots nb_k) = (k+1)\dots n(b_k + kb_{k-1}) = c_k + c_{k-1}.$$

De plus, $D(c_0) = n!D(b_0) = n!b_0 = c_0$. Ainsi, la matrice de $D$ dans la base $\mathcal{C} = (c_0, \dots, c_n)$ est bien :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3** – (Ecricome 1999)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $M - \lambda I_4$ n'est pas inversible, c'est-à-dire n'est pas de rang 4. On effectue un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I_4$ afin de déterminer son rang. On se ramène ici à une matrice triangulaire inférieure, en inversant le procédé habituel, car on a déjà un certain nombre de coefficients nuls sur la partie supérieure de la matrice.

$$M_\lambda = M - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2L_3 - L_4}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - \lambda L_4}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 4-4\lambda+\lambda^2 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -2+\lambda & 3-2\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = \frac{3}{2}$, on obtient $M_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$

En echangeant les lignes 2 et 3, on se ramène à une matrice triangulaire inférieure à coefficients daigonaux tous non nuls, donc $M_{\frac{3}{2}}$ est inversible, donc $\frac{3}{2}$ n'est pas valeur propre. On peut donc continuer le pivot, en supposant que $\lambda \neq \frac{3}{2}$. Alors l'opération $L_2 \leftarrow (3-2\lambda)L_2 - (2-\lambda)L_3$ est valide, et on obtient la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -4+4\lambda-2\lambda^2 & 2(2-\lambda)^3 & 0 & 0 \\ 5 & -2+\lambda & 3-2\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Puisque $\lambda \neq \frac{3}{2}$, la matrice triangulaire $A_\lambda$ est non inversible si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul, si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$. Comme $A_\lambda$ et $M_\lambda$ sont de même rang, on obtient $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$.
De plus :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(M_1) = \mathrm{rg}(A_1) = 3$ et $\mathrm{rg}(M_2) = \mathrm{rg}(A_2) = 1$. D'après le théorème du rang, les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2 sont donc de dimension 1 chacun. La somme des dimensions des espaces propres n'est pas égale à 4, donc la matrice $M$ n'est pas diagonalisable.

2. Question un peu technique.

On note $H = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$, $H' = (h'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ et $HH' = (h''_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$. On a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!]$ :

$$h''_{i,j} = \sum_{k=0}^{4} h_{i,k}h'k,j.$$

- Si $i = 1$, alors
$$\forall j \in [\![1,4]\!],\ h''_{1,j} = 1 \cdot h'_{1,j} + 0 \cdot h'_{2,j} + 0 \cdot h'_{3,j} + 0 \cdot h'_{4,j} = h'_{1,j}.$$
Ainsi, la première ligne de $HH'$ est $(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.
- Si $j = 1$ et $i > 1$, alors
$$h''_{i,1} = h_{i,1} + a'h_{i,2} + b'h_{i,3} + c'h_{i,4}$$
Ainsi :
  * $h''_{2,1} = a + a'a_{1,1} + b'a_{1,2} + c'a_{1,3} = [C + AC']_{1,1}$
  * $h''_{3,1} = b + a'a_{2,1} + b'a_{2,2} + c'a_{2,3} = [C + AC']_{2,1}$
  * $h''_{4,1} = c + a'a_{3,1} + b'a_{3,2} + c'a_{3,3} = [C + AC']_{2,1}$
- Si $j > 1$ et $i > 1$, alors
$$h''_{i,j} = h_{i,1} \cdot 0 + h_{i,2} \cdot h'_{2,j} + h_{i,3} \cdot h'_{3,j} + h_{i,4} \cdot h'_{4,j} = \sum_{k=2}^{4} a_{i-1,k-1}a'_{k-1,j-1} = [A, A']_{i-1,k-1}.$$

Ainsi, le produit $HH'$ s'écrit bien sous la forme

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix},\ \text{où } C'' = C + AC'.$$

3. Soit, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: il existe $U_n$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$.

L'initialisation se fait pour $n = 1$, d'après l'expression de $M$, On a alors $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors, d'après la question précédente,

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^nU_1 & V^nV \end{pmatrix}.$$

En posant $U_{n+1} = U_n + V^nU_1$, on obtient bien

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_{n+1} & V^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

4. On a $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Un calcul rapide amène :

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad W^3 = 0.$$

De plus, $W$ et $2I$ commutent, donc, d'après la formule du binôme, pour tout $n \geqslant 2$,

$$V^n = (W + 2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} W^k 2^{n-k} = 2^n I_3 + n2^{n-1}W + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}W^2.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant 2, \quad V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que cette expression est aussi valable pour $n = 1$ et $n = 0$.

5. **Calcul de $U_n$**

   (a) Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Alors $y, z, t$ sont solutions du système

   $$M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   On obtient le système :

   $$\begin{cases} -2 + 2y & = 0 \\ 5 - y + z & = 0 \\ -1 + 3y + z - 2t & = 0 \end{cases}$$

   donc $y = 1$, $z = -4$, $t = -1$. Ainsi $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Le vecteur $X$ étant vecteur propre associé à 1 de la matrice $M$, on a, sans calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n X = X$.

   (b) Ainsi, d'après les règles de calcul matriciel sur les colonnes, si $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ représentent les 4 colonnes de $M^n$, on a :

   $$C_1 + C_2 - 4C_3 - 2C_4 = X,$$

   et, par restriction aux trois dernières coordonnées, et d'après l'expression des colonnes de $V^n$ :

   $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} n2^{n-1} \\ 2^n \\ n2^{n-1} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ -n2^{n-1} \\ (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}.$$

   Je vous laisse faire la réduction finale.

## Problème – Étude du nombre de racines de certains polynômes à coefficients aléatoires

### Partie I – Cas d'un polynôme de degré 2 (extrait de ESCP/EAP 2006)

1. Pour tout $\omega$, $Q_\omega$ admet un nombre de racine compris entre 0 et 2. Donc $M(\omega)$ est bien défini, et prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Ainsi, $M$ définit une application de $\Omega$ dans $\{0, 1, 2\}$.

   De plus,
   - $M^{-1}(\{0\}) = (X_1^2 - 4X_0)^{-1}(]-\infty, 0])$, et comme $X_1^2 - 4X_0$ est une variable aléatoire, $(X_1^2 - 4X_0)^{-1}(]-\infty, 0])$ est un élément de $\mathcal{A}$. Ainsi, $M^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$.
   - De même, $M^{-1}(\{1\}) = (X_1^2 - 4X_0)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$
   - et enfin, $M^{-1}(\{2\}) = (X_1^2 - 4X_0)^{-1}(]0, +\infty[) \in \mathcal{A}$

   (on rappelle qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si l'image réciproque par $X$ de tout intervalle est dans la tribu, et que cela est le cas pour les fonctions prenant un nombre au plus dénombrable de valeurs si et seulement si l'image réciproque de tout point est dans la tribu).

   Je ne m'attendais pas vraiment à ce que vous donniez la justification précise. Je me contentais de $M : \Omega \to \mathbb{R}$.

2. Soit $Z$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0, 1[$. On suppose dans cette question que $X_0$ et $X_1$ suivent la même loi que $2Z - 1$.

(a) La variable $Z$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, donc $2Z-1$ prend ses valeurs dans $\{-1,1\}$. De plus,

$$P(X_0=-1)=P(2Z-1=-1)=P(Z=0)=1-p \qquad \text{et} \qquad P(X_0=1)=P(2Z-1=1)=P(Z=1)=p.$$

(b) Ainsi, $X_1^2$ est la variable constante égale à 1. Posons $D=X_1^2-4X_0$, discriminant du polynôme. On obtient donc $D(\Omega)=\{-3,5\}$, et

$$P(D=-3)=P(X_0=1)=p \qquad \text{et} \qquad P(D=5)=P(X_0=-1)=1-p.$$

Ainsi :

$$P(D<0)=p, \qquad P(D=0)=0 \qquad \text{et} \qquad P(D>0)=1-p.$$

On en déduit que $M(\Omega)=\{0,2\}$ et :

$$P(M=0)=P(D<0)=p \qquad \text{et} \qquad P(M=2)=P(D>0)=1-p.$$

Ainsi, $\frac{M}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$, d'où

$$E(M)=2E\left(\frac{M}{2}\right)=2(1-p)$$

(évidemment le calcul peut être fait directement !)

3. • La variable $Y_1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x<0$, $F_{Y_1}(x)=0$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Alors :

$$F_{Y_1}(x)=P(X_1^2\leqslant x)=P(X_1\leqslant\sqrt{x}),$$

puisque $X_1$ est à valeurs positives. Ainsi :

$$F_{Y_1}(x)=F_{X_1}(\sqrt{x})=1-\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}}.$$

Cette expression étant aussi nulle en $x=0$, on obtient bien :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Y_1}(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

On obtient une densité de $Y_1$ par dérivation presque partout, par exemple :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{Y_1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

• La variable $Y_0=-4X_0$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-$, donc, pour tout $x\geqslant 0$, $[Y_0\leqslant x]$ est l'événement certain, donc $F_{Y_0}(x)=1$.
Soit $x\in\mathbb{R}_-^*$. Alors

$$F_{Y_0}(x)=P(Y_0\leqslant x)=P(-4X_0\leqslant x)=P(X_0\geqslant -\frac{x}{4})=1-P(X_0<-\frac{x}{4})=1-P(X_0\leqslant -\frac{x}{4})=\mathrm{e}^{\frac{x}{8}},$$

l'avant dernière égalité découlant du fait que $X_0$ est une variable aléatoire à densité, donc que ses probabilités ponctuelles sont nulles. Ainsi, on obtient bien :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Y_0}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} & \text{si } x<0\end{cases}$$

Une densité de $Y_0$ est donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{Y_0}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\geqslant 0\\ \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}} & \text{si } x<0\end{cases}$$

4. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right),$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

(a) La fonction $g$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a donc deux impropretés en 0 et en $+\infty$. La fonction $g$ est positive, on peut donc utiliser des critères de comparaison spécifique aux intégrales de fonctions positives.

- En 0, $g(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et on obtient la convergence par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} < 1$.
- Au voisinage de $+\infty$, d'après les croissances comparées,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right) = o\left(\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right)^2\right).$$

Or, $\dfrac{t}{4}+\sqrt{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{4}$, donc

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right) = o\left(t^2\right) \qquad \text{puis:} \qquad g(t) = o(t^{\frac{3}{2}}).$$

On obtient donc la convergence en $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$.

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

(b) Calculons le produit de convolution de $f_{Y_0}$ et $f_{Y_1}$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_1} \star f_{Y_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}}{2}} f_{Y_0}(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

- Si $x \leqslant 0$, alors pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x-t \leqslant 0$, et donc

$$f_{Y_1} \star f_{Y_0}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}}{2}} \frac{1}{8} \mathrm{e}^{\frac{x-t}{8}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{32} \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)}\ \mathrm{d}t$$

- Si $x > 0$, alors $x-t \leqslant 0$ si et seulement si $t \geqslant x$, et donc

$$f_{Y_1} \star f_{Y_0}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}}{2}} \frac{1}{8} \mathrm{e}^{\frac{x-t}{8}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{32} \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4}+\sqrt{t}\right)}\ \mathrm{d}t$$

5. On désigne par $\Phi$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t.$$

(a) L'intégrale étant convergente, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = 1,$$

en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{2} \cdot u$, et en reconnaissant l'intégrale de Gauss.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = 1 - \Phi(x).$$

(b) La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, bijective de $]0,+\infty[$ sur lui-même. Ainsi, on peut effectuer le changement de variables $u = \sqrt{t}$ sur l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$.

(c) On effectue ce changement de variables, qui donne $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{4}+u\right)}\ \mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}+1\right)^2-1\right)}\ \mathrm{d}u = 2\sqrt{\mathrm{e}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+1\right)^2}\ \mathrm{d}u$$

On effectue maintenant le changement de variable affine $v = \dfrac{u}{2} + 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = 4\sqrt{\mathrm{e}} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\ \mathrm{d}v.$$

Ainsi, pour tout $x < 0$,

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8} \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} (1 - \Phi(1)).$$

(d) On procède de même pour $x \geqslant 0$ ; les mêmes changements de variable amènent :

$$\int_x^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = 2\sqrt{\mathrm{e}} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+1\right)^2}\ \mathrm{d}u = 4\sqrt{\mathrm{e}} \int_{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\ \mathrm{d}v.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8} \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)\right).$$

(e) On a $M(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. La variable $Y$ représente le discriminant du polynôme. Ainsi, $P(M = 0) = P(Y < 0)$, $P(M = 1) = P(Y = 0)$ et $P(M = 2) = P(Y > 0)$.
Comme $Y$ est une variable aléatoire à densité, $P(M = 1) = 0$.
Ainsi, il suffit de déterminer $P(M = 0)$ :

$$\begin{aligned} P(M = 0) = P(Y < 0) &= \int_{-\infty}^0 f_Y(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8}(1 - \Phi(1)) \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\frac{x}{8}}\ \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1)) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y = \sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1))\Gamma(1) = \sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1)). \end{aligned}$$

La loi de $M$ est donc donnée par :

$$P(M = 0) = \sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1)), \qquad P(M = 1) = 0, \qquad P(M = 2) = 1 - \sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1)).$$

On en déduit son espérance :

$$E(M) = 2 - 2\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1 - \Phi(1)).$$

## Partie II – Cas d'un polynôme de degré 3

1. • Tout d'abord, $R_\omega$ étant de degré 3, il admet au plus 3 racines. Ainsi, $N(\Omega) \subset [\![0, 4]\!]$.
   • De plus, $R_\omega$ est continue sur $\mathbb{R}$, de limite $-\infty$ en $-\infty$, et de limite $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $R_\omega$ admet donc au moins une racine. Ainsi, $N(\Omega) \subset [\![1, 3]\!]$.

   Je me contentais de cette inclusion. Pour obtenir l'égalité, il faut se servir de la question suivante.
2. Soit $\omega \in \Omega$. Alors $R_\omega$ est dérivable, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R'_\omega(x) = 3x^2 + 2X_2(\omega)x.$$

   Ainsi, $R'_\omega(x)$ s'annule en 0 et en $-\frac{2X_2(\omega)}{3}$.
   • Si $X_2(\omega) = 0$, alors $R'_\omega$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc $R'\omega$ est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$, donc $N(\omega) = 1$. On a bien dans ce cas $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) > 0$, qui ne correspond à aucun des deux cas de l'énoncé.
   • Sinon, $R'_\omega$ admet deux racines distinctes, et est positive à l'extérieur de ses racines, négative entre ses racines. Ainsi, $R_\omega$ croît jusqu'à la première racine de $R'_\omega$, puis décroît jusqu'à la deuxième racine, puis croît.
     * Si les valeurs de $R_\omega$ aux deux racines de $R'_\omega$ sont de même signe strictement (donc positives, puisque $R(\omega)(0) > 0$), $R_\omega$ n'a qu'une racine.
     * Si $R_\omega$ s'annule en une des deux racines de $R'_\omega$, alors $R_\omega$ admet deux racines distinctes. C'est nécessairement en $-\frac{2X_2(\omega)}{3}$ que s'annule alors $R_\omega$, puisque $R_\omega(0) > 0$.
     * Si $R_\omega$ prend des signes strictement opposés aux deux racines de $R'_\omega$, d'après le TVI, on en déduit que $R_\omega$ s'annule en trois racines distinctes. Dans ce cas,oOn a nécessairement $R_\omega\left(-\frac{2X_2(\omega)}{3}\right) < 0$.

On obtient donc :

- $N(\omega) = 1$ si et seulement si $R_\omega\left(-\frac{2X_2(\omega)}{3}\right) > 0$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) > 0$
- $N(\omega) = 2$ si et seulement si $R_\omega\left(-\frac{2X_2(\omega)}{3}\right) = 0$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) = 0$
- $N(\omega) = 3$ si et seulement si $R_\omega\left(-\frac{2X_2(\omega)}{3}\right) < 0$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) < 0$

En choisissant des valeurs explicites de $X_2$ et $X_3$ dans leur intervalle de valeurs possibles, sachant qu'on peut choisir ces valeurs indépendamment l'une de l'autre, $X_2$ et $X_3$ étant indépendantes, on peut alors montrer que ces différents cas sont tous possibles, ce qui permet de justifier l'égalité $N(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

3. La fonction $t \mapsto t^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\frac{4}{27}X_2^3}(x) = P\left(\frac{4}{27}X_2^3 \leqslant x\right) = P\left(X_2 \leqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{4}{27} \\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} & \text{si } -\frac{4}{27} \leqslant x < \frac{4}{27} \\ 1 & \text{si } x > \frac{4}{27}. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{27}, \frac{4}{27}\}$, et on montre facilement l'égalité des limites à droite et à gauche en $-\frac{4}{27}$ et en $\frac{4}{27}$, d'où la continuité sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\frac{4}{27}X_2^3$ est une variable à densité.
Une densité est obtenue par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\frac{4}{27}X_2^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{4}{27} \\ \frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} & \text{si } -\frac{4}{27} \leqslant x \leqslant \frac{4}{27} \\ 0 & \text{si } x > \frac{4}{27}. \end{cases}$$

4. Comme $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes, il en est de même de $\frac{4}{27}X_2^3$ et $X_3$. Ainsi, on forme le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\frac{4}{27}X_2^3}(t) f_{X_3}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_{\frac{4}{27}X_2^3}(t)\ \mathrm{d}t.$$

D'après l'expression de $f_{\frac{4}{27}X_2^3}$, on obtient donc :

- Si $x < -\frac{4}{27}$,
$$f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = 0$$
- Si $-\frac{4}{27} \leqslant x \leqslant \frac{4}{27}$,
$$f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = \int_{-\frac{4}{27}}^{x} \frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\ \mathrm{d}t = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x} + 12$$
- Si $\frac{4}{27} \leqslant x \leqslant \frac{23}{27}$,
$$f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = \int_{-\frac{4}{27}}^{\frac{4}{27}} \frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = 1$$
- Si $\frac{23}{27} \leqslant x \leqslant \frac{31}{27}$,
$$f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = \int_{x-1}^{\frac{4}{27}} \frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{(1-x)} + 12$$
- Si $x > \frac{31}{27}$, alors
$$f_{\frac{4}{27}X_2^3} \star f_{X_3}(x) = 0.$$

La fonction ainsi définie est continue presque partout, et de plus, les variables sont indépendantes, donc il s'agit d'une densité de $Z$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{4}{27} \\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x} + 12 & \text{si } -\frac{4}{27} \leqslant x < \frac{4}{27} \\ 1 & \text{si } \frac{4}{27} \leqslant x < \frac{23}{27} \\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{(1-x)} + 12 & \text{si } \frac{23}{27} \leqslant x \leqslant \frac{31}{27} \\ 0 & \text{si } x > \frac{31}{27}. \end{cases}$$

5. La variable $Z$ est donc une variable aléatoire à densité, donc $P(Z=0)=0$, donc $P(N=2)=0$, d'après ce qui précède.
   De plus,

$$P(N=3) = P(Z<0) = \int_{-\infty}^{0} f_Z(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{4}{27}}^{0} \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{t} + 12\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{2}\cdot\left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{27} = \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{2}{27} = \frac{5}{54}.$$

   On obtient donc :

$$P(N=1) = \frac{49}{54}, \qquad P(N=2) = 0, \qquad P(N=3) = \frac{5}{54}.$$

   L'espérance de $N$ est donc

$$E(N) = \frac{49}{54} + \frac{15}{54} = \frac{64}{54} = \frac{32}{27}.$$