

Concours Blanc n° 1 – Épreuve 1 (DS 4 – 4 heures)
Épreuve de type « EDHEC »

Exercice 1 – (EDHEC 2006)

1. (a) Tout d'abord, l'expression de l'énoncé à du sens, puisque $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. On a alors :

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \text{id}) - (f - \lambda_2 \text{id})) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \text{id} = \text{id}.$$

- (b) • Soit $x \in \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. Alors :

$$f(x) = \lambda_1 x \quad \text{et} \quad f(x) = \lambda_2 x.$$

Par conséquent, $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, donc $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, et comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}) \subset \{0\}$, et l'inclusion réciproque étant évidentes (car ce sont des sous-espaces vectoriels), on a l'égalité. Ainsi, la somme de ces deux espaces est directe.

Cette propriété découle aussi d'une propriété plus générale sur les sous-espaces propres (en constatant que si ces espaces sont non nuls, ce sont des sous-espaces propres de f)

- Soit $x \in \mathbb{C}^m$. On a, d'après la question 1,

$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_1 x) - (f(x) - \lambda_2 x) = x_1 + x_2,$$

où $x_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_1 x)$ et $x_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_2 x)$. Or :

- * $(f - \lambda_1 \text{id})(x_2) = (f - \lambda_1 \text{id}) \circ (f - \lambda_2 \text{id})(0) = \theta(x) = 0$, donc $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$;
- * $(f - \lambda_2 \text{id})(x_1) = (f - \lambda_2 \text{id}) \circ (f - \lambda_1 \text{id})(0) = \theta(x) = 0$, donc $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$

On explique un peu ce dernier calcul en justifiant l'interversion de la composition :

$$(f - \lambda_2 \text{id}) \circ (f - \lambda_1 \text{id}) = f \circ f - (\lambda_1 + \lambda_2) \text{id} + \lambda_1 \lambda_2 \text{id} = (f - \lambda_1 \text{id}) \circ (f - \lambda_2 \text{id}).$$

(on peut faire une telle interversion dès lors que les deux endomorphismes sont des expressions polynomiales d'un même endomorphisme).

Ainsi, on a bien obtenu une décomposition d'un élément de $\mathbb{C}^m$ quelconque comme somme d'un élément de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et d'un élément de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. Ainsi :

$$\mathbb{C}^m \subset \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}).$$

L'inclusion réciproque étant immédiate (car les deux noyaux sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$), on a l'égalité.

- (c) Puisque $m \geq 1$ d'après l'énoncé, les deux espaces ne peuvent pas être tous les deux nuls. Ainsi, il y a trois cas possibles :

- Si $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) = 0$, alors $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}) = \mathbb{C}^m$, donc $f - \lambda_2 \text{id} = 0$, donc $f = \lambda_2 \text{id}$, et f est évidemment diagonalisable (c'est une homothétie). Dans ce cas, f possède une seule valeur propre égale à λ_2
- De même si $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}) = 0$, l'unique valeur propre étant λ_1
- Si $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \neq 0$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}) \neq 0$, alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f . D'après la question 1(b), la somme des dimensions des espaces propres associés est égale à m , la dimension totale. Comme la somme des dimensions de tous les espaces propres ne peut pas excéder m , et comme tous les sous-espaces propres sont au moins de dimension 1, il en résulte qu'il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre (cela résulte aussi des propriétés reliant le spectre à l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur...) Ainsi, $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, et f est diagonalisable, puisque $\mathbb{C}^m$ est somme directe des sous-espaces propres.

2. Par exemple $i \cdot I$. Il y en a beaucoup d'autres.

3. (a) On a $A^2 = -I$. Ainsi, si f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n+1}$ canoniquement associé à A (vue comme matrice à coefficients complexes), on a $f^2 = -\text{id}$, donc

$$(f - \text{id}) \circ (f + \text{id}) = \theta.$$

D'après la question 1, f est diagonalisable, donc A est diagonalisable, et $\text{Sp}(A) \subset \{-i, i\}$. De plus, f ne peut pas être une homothétie, sinon A serait diagonale, de la forme λI , et on aurait $A^2 = \lambda^2 I = -I$, donc $\lambda^2 = -1$. Or, comme A est à coefficients réels, $\lambda \in \mathbb{R}$, et cette relation est impossible.

Ainsi, d'après 1(c) (on est dans le troisième cas), $\text{Sp}(A) = \{i, -i\}$.

- (b) Soit $X \in E_i$. Alors $AX = iX$, donc $\overline{AX} = \overline{iX}$. D'après les formules de produit matriciel (s'obtenant par produit et somme des coefficients), et d'après les règles de conjugaison (respectant produit et somme), on a alors :

$$\overline{AX} = -i\overline{X}.$$

Comme A est à coefficients réels, on obtient finalement,

$$A\overline{X} = -i\overline{X},$$

donc $\overline{X} \in E_{-i}$.

Le même raisonnement montre que si $Y \in E_{-i}$, alors $\overline{Y} \in E_i$, d'où l'équivalence (avec $Y = \overline{X}$)

- (c) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E_i . Alors $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille de vecteurs de E_{-i} , d'après ce qui précède. De plus, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \overline{u_i} = 0.$$

En conjugant coefficient par coefficient, on obtient :

$$\sum_{i=1}^p \overline{\lambda_i} u_i = 0.$$

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre, donc il en résulte que

$$\overline{\lambda_1} = \dots = \overline{\lambda_p} = 0 \quad \text{puis:} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Ainsi, $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i} .

Cette famille libre étant de cardinal p , on obtient

$$\dim(E_{-i}) \geq p = \dim(E_i)$$

Le même raisonnement en partant d'une base de E_{-i} amène l'inégalité

$$\dim(E_i) \geq \dim(E_{-i}),$$

d'où l'égalité.

- (d) On a $\text{Sp}(A) = \{-i, i\}$, et A est diagonalisable, donc

$$2n + 1 = \dim \mathbb{C}^{2n+1} = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2 \dim E_i,$$

d'où une contradiction sur les parités.

Ainsi, l'hypothèse d'existence de A à coefficients réels telle que $A^2 = -I$ amène à une contradiction. Il n'existe donc pas de telle matrice.

Exercice 2 – (EDHEC 1997)

1. On a :

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $g \circ f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le cours, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire, donc $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. (a) Soit $x \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors

$$\exists y \in \mathbb{R}^3, \quad x = g \circ f(y) = g(f(y)).$$

Ainsi, x est l'image par g de $f(y)$, donc $x \in \text{Im}(g)$. D'où l'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.

(b) En appliquant le théorème du rang à g , on a :

$$\dim \text{Im}(g) + \dim \text{Ker}(g) = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Comme $\dim \text{Ker}(g) \geq 0$, il en résulte que $\dim \text{Im}(g) \leq 2$.

(c) De plus, d'après 2(a), l'inclusion des espaces amenant une inégalité sur leurs dimensions :

$$\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g)) \leq 2.$$

(d) • Puisque $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a :

$$\text{Im}(g \circ f) \neq \mathbb{R}^3,$$

donc $g \circ f$ n'est pas surjective.

• D'après le théorème du rang appliqué à $g \circ f$, l'inégalité de 2(c) amène :

$$\dim(\text{Ker}(g \circ f)) \geq 1,$$

donc $\text{Ker}(g \circ f) \neq \{0\}$, donc $g \circ f$ n'est pas injective.

En fait, un seul de ces deux arguments (et une justification idoine) suffit, puisque pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie, l'injectivité équivaut à la surjectivité.

3. On a donc $\text{Ker}(g \circ f) \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de $g \circ f$, donc de BA .

4. (a) On a :

$$ABX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \neq 0.$$

Or, si $BX = 0$, on a aussi $ABX = 0$, ce qui contredit la ligne précédente. Donc $BX \neq 0$.

(b) Soit λ une valeur propre de AB . Il existe alors $X \neq 0$ tel que

$$ABX = \lambda X, \quad \text{donc:} \quad BA(BX) = \lambda(BX).$$

Or, puisque $X \neq 0$, d'après la question 4(a), $BX \neq 0$. Ainsi, BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur λ , donc λ est une valeur propre de BA .

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de AB si et seulement si $AB - \lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

donc si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(AB) = \{-1, 1\}$.

D'après la question 4(b), 1 et -1 sont donc aussi valeurs propres de BA . Comme 0 est également valeur propre de BA d'après la question 3, il en résulte que BA , matrice d'ordre 3, admet 3 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Exercice 3 – (Extrait de ESCP 1999)

Correction : voir l'autre épreuve

Problème – (EDHEC 2000)

Partie I –

1. (a) Rappelez-vous d'une propriété donnée de manière anticipée pour votre dernier DM : J est symétrique, donc diagonalisable.
- (b) Posons $J = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, les $\alpha_{i,j}$ étant tous égaux à 1. Posons $J^2 = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \beta_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \alpha_{k,j} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

Ainsi, J^2 est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à n , donc $J^2 = nJ$.

On pouvait aussi faire ce calcul par considération des colonnes, chaque colonne de J^2 étant obtenue comme combinaison linéaire des colonnes de J , les coefficients étant donnés par les coefficients de la colonne correspondante de J (donc tous égaux à 1). Ainsi, chaque colonne de J^2 est la somme de toutes les colonnes de J , donc n fois la colonne constituée de 1.

Ainsi, $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J . On a donc :

$$\text{Sp}(J) \subset \text{rac}(X^2 - nX) = \{0, n\}.$$

- Comme les colonnes de J sont liées (elles sont deux à deux colinéaires!), J n'est pas inversible, donc $0 \in \text{Sp}(J)$

- On a $J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à n , donc $n \in \text{Sp}(J)$.

On a donc $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$.

2. (a) De plus, $\text{rg}(J) = 1$ puisque ses colonnes sont deux à deux colinéaires. Donc le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-1$ (d'après le théorème du rang). Comme $\dim E_n \geq n$, on obtient :

$$\dim E_0 + \dim E_n \geq n,$$

et la somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvant excéder la dimension totale, cette inégalité est une égalité. Il en résulte que J est diagonalisable, et $\dim E_n = 1$. Soit $(b_1, \dots, b_{n-1})$ une base de E_0 , et (b_n) une base de E_n . Alors $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J . Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J . Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

De plus, $M_a = aJ + (1-a)I$. Ainsi $af + (1-a)\text{id}$ est l'endomorphisme canoniquement associé à M_a . Or, la matrice de $af + (1-a)\text{id}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(af + (1-a)\text{id}) = a\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + (1-a)I_n = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1-a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1+(n-1)a \end{pmatrix}$$

Ainsi, les valeurs propres de M_a sont $1-a$ et $1+(n-1)a$, ces deux valeurs propres étant distinctes puisque $n \neq 0$.

- (b) M_a est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(M_a)$, donc si et seulement si $a - 1 \neq 0$ et $1 + (n - 1)a \neq 0$, donc si et seulement si

$$a \neq 1 \quad \text{et} \quad a \neq -\frac{1}{n-1}.$$

3. Ici, $n = 4$.

- (a) D'après les questions précédentes, $\dim E_0 = n - 1 = 3$. De plus les colonnes de J vérifient les relations :

$$C_1 - C_2 = 0, \quad C_1 - C_3 = 0, \quad C_1 - C_4 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans E_0 . Ils forment une famille libre puisqu'ils

forment une famille échelonnée par rapport à leur dernière coordonnée non nulle. Ainsi, la dimension de E_0 étant 3, ils forment une base de E_0 .

- (b) Youpi ! (c'était une promesse, il fallait bien !)

Notons (e_1, e_2, e_3) la base de E_0 de la question précédente. Comme il s'agit d'une famille libre, on peut lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit (b_1, b_2, b_3) la famille orthonormale (qui sera, d'après les dimensions, une b.o.n. de E_0) obtenue de (e_1, e_2, e_3) à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- On a $b_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Le vecteur b_2 s'exprime :

$$b_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \quad \text{où} \quad u_2 = e_2 - \langle e_2, b_1 \rangle b_1.$$

On a :

$$\langle e_2, b_1 \rangle b_1 = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\|u_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, d'où :

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Le vecteur b_3 s'exprime :

$$b_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}, \quad \text{où} \quad u_3 = e_3 - \langle e_3, b_1 \rangle b_1 - \langle e_3, b_2 \rangle b_2.$$

On a :

$$\langle e_3, b_1 \rangle b_1 = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\langle e_3, b_2 \rangle b_2 = \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ainsi,

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\|u_3\| = \frac{\sqrt{12}}{3}$, donc

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Une vérification rapide montre bien l'orthogonalité de la famille (b_1, b_2, b_3) obtenue, ce qui confirme les calculs.

- (c) On sait que $\dim E_n = \dim E_4 = 1$, et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, dont la norme vaut 2.

Ainsi, posons

$$b_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une vérification sans difficulté montre que $b_1 \perp b_4$, $b_2 \perp b_4$ et $b_3 \perp b_4$. Comme de plus (b_1, b_2, b_3) est une famille orthonormale, et que $\|b_4\| = 1$, on en déduit que (b_1, b_2, b_3, b_4) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^4$. Son cardinal étant 4, et par liberté des familles orthonormales, on en déduit que c'est une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$. Cette b.o.n. est formée de vecteurs propres de J , b_1, b_2, b_3 étant associés à la valeur propre 0, et b_4 étant associé à la valeur propre 4.

Partie II –

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$.

(a) On a

$$M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = aJ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + (1-a)I \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = a(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + a\lambda_2 + \dots + a\lambda_n \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 + \dots + a\lambda_n \\ \vdots \\ a\lambda_1 + \dots + a\lambda_{n-1} + \lambda_n \end{pmatrix}$$

Or, $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0$, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$0 = \left\langle u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle.$$

Or, d'après l'énoncé, pour tout $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = a$, et $\langle u_i, u_i \rangle = 1$, car les u_i sont unitaires. Ainsi

$$0 = \lambda_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a\lambda_j.$$

C'est le coefficient de la ligne i de $M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Par conséquent, $M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est nul.

- (b) Supposons que $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$. Alors M_a est inversible, et la relation précédente équivaut à $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Comme il s'agit d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, le cardinal de cette famille libre est au plus égal à 3, donc $n \leq 3$.

2. Étude du cas $a = 1$

- (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$,

$$\| \langle u_i, u_j \rangle \| \leq \| u_i \| \cdot \| u_j \|.$$

On a égalité si et seulement si u_i et u_j sont colinéaires

- (b) Or, si $a = 1$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = 1 = \| u_i \| \cdot \| u_j \|$, les vecteurs étant unitaires. Ainsi, les u_i sont deux à deux colinéaires. Comme ils sont unitaires, ils sont non nuls, et par conséquent,

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad u_i = \lambda_i u_1.$$

De plus,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 1 = a = \langle u_i, u_1 \rangle = \lambda_i \langle u_1, u_1 \rangle = \lambda_i,$$

donc pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\lambda_i = 1$, donc $u_i = u_1$. Or, l'énoncé stipule que les u_i doivent être deux à deux distincts, ce qui n'est possible que si la famille des u_i n'est constitué que d'un vecteur. Ainsi, $n = 1$.

3. Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4) formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

- (a) D'après les questions 1 et 2 de la partie II, ceci est impossible, sauf si $a = -\frac{1}{n-1}$. S'il existe une telle famille, alors nécessairement,

$$a = -\frac{1}{n-1} = -\frac{1}{3},$$

puisque $n = 4$ ici.

- (b) Montrons que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

En appliquant successivement le produit scalaire avec u_1 , u_2 et u_3 , on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 &= 0 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 &= 0 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_3 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Un calcul rapide montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (on pourra par exemple remarquer qu'en sommant les trois lignes, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, et qu'en ajoutant un tiers de cette expression à chaque ligne, on obtient directement λ_1 , λ_2 et λ_3).

Ainsi, (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (c) Le vecteur u_4 se décompose donc dans cette base : il existe μ_1 , μ_2 et μ_3 des réels tels que

$$u_4 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3.$$

En appliquant successivement le produit scalaire avec u_1, u_2, u_3 et u_4 , on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

La dernière équation s'obtient d'ailleurs comme somme des trois premières. Ainsi, en retranchant cette dernière équation aux trois autres, il vient :

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\lambda_1 = -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}\lambda_2 = -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}\lambda_3 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Ainsi, le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base (u_1, u_2, u_3) est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En fait, le problème étant symétrique en u_1, u_2, u_3 et u_4 , cela signifie que ces 4 vecteurs forment un tétraèdre régulier.

Partie III –

1. Trop facile! $a = 0$ équivaut à l'orthogonalité de la famille (et même l'orthonormalité, les vecteurs étant supposés unitaires). Ainsi, la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ convient.

2. On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

(a) On a :

$$\|v_1\|^2 = 1, \quad \|v_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \quad \|v_3\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

donc les vecteurs sont unitaires. De plus,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est solution du problème avec $a = -\frac{1}{2}$.

(b) On a :

$$\langle e_3, \lambda v_1 + \mu e_3 \rangle = \mu = \langle e_3, \lambda v_2 + \mu e_3 \rangle = \langle e_3, \lambda v_3 + \mu e_3 \rangle,$$

car e_3 est orthogonal à e_1 et e_2 , donc à v_1, v_2 et v_3 . Ainsi, on doit avoir $\mu = a = -\frac{1}{3}$.

De plus,

$$-\frac{1}{3} = \langle \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3 \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle + \mu^2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \mu^2.$$

Ainsi,

$$\lambda^2 = 2\frac{4}{9}, \quad \text{donc:} \quad \lambda = \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

On vérifie facilement que les deux choix de signe conviennent. On pose par exemple $\lambda = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. La famille considérée est donc :

$$\left(e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_1 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_2 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}\sqrt{2}v_3 - \frac{1}{3}e_3 \right)$$

On vérifie facilement que cette famille est solution du problème. Pour calculer les normes, on remarquera que $e_3 \perp v_i$, donc

$$\left\| \frac{2}{3}\sqrt{2}v_i - \frac{1}{3}e_3 \right\|^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$