

Concours Blanc n° 1 – Épreuve 1 (DS 4 – 4 heures)
Épreuve de type « Parisiennes »

Problème – (ESCP 1999)

1. (a) • Soit $(A, B) \in (E_n)^2$, $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j$. Alors :

$$\Phi_n(B, A) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq j, i \leq n} a_j b_i s_{j+i},$$

les variables étant muettes. Ainsi, par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$,

$$\Phi_n(B, A) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} b_i a_j s_{j+i} = \Phi_n(A, B).$$

Ainsi, Φ_n est symétrique.

- Soit A, B et C dans E_n , avec les notations intuitives des coefficients, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi_n(\lambda A + B, C) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (\lambda a_i + b_i) c_j s_{i+j} = \lambda \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i c_j s_{i+j} + \sum_{0 \leq i, j \leq n} b_i c_j s_{i+j} = \lambda \Phi_n(A, C) + \Phi_n(B, C).$$

Ainsi, Φ_n est linéaire par rapport à sa première variable.

- Étant symétrique, elle est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable.

Ainsi, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique.

- (b) S_n est une application de E_{2n} dans $\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier qu'elle est linéaire.

Soit $(A, B) \in E_{2n}$, avec notation intuitive des coefficients, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$S_n(\lambda A + B) = \sum_{i=0}^{2n} (\lambda a_i + b_i) s_i = \lambda \sum_{i=0}^{2n} a_i s_i + \sum_{i=0}^{2n} b_i s_i = \lambda S_n(A) + S_n(B).$$

Ainsi, $\S_n$ est bien une forme linéaire. De plus, si A et B sont dans E_n , en écrivant

$$A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^n b_j X^j,$$

et en posant $a_i = 0$ pour tout $i > n$ et $b_j = 0$ pour tout $j > n$, on a :

$$AB = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k, \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Ainsi,

$$S_n(AB) = \sum_{k=0}^{2n} c_k s_k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq i \leq k \leq 2n} a_i b_{k-i} s_k = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=i}^{2n} a_i b_{k-i} s_k.$$

En effectuant dans la somme interne un changement d'indices $j = k - i$, il vient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} a_i b_j s_{i+j}.$$

Comme $a_i = 0$ si $i > n$, on obtient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-i} a_i b_j s_{i+j}.$$

Comme enfin, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $2n - i \geq n$, et que $b_j = 0$ si $j > n$, on obtient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j s_{i+j} = \Phi_n(A, B).$$

J'ai fait ce calcul sans tenir compte de l'indication...

Si on veut se servir de l'indication, on peut faire de la façon suivante : soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$; soit $A = X^i$ et $B = X^j$. Alors

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k b_\ell s_{k+\ell},$$

où les a_k et les b_ℓ sont tous nuls, sauf $a_i = 1$ et $b_j = 1$ (attention à ne pas mélanger les variables i et j posées dans la définition de A et B et les variables muettes de sommation ; c'est la raison pour laquelle j'ai modifié ces variables). Ainsi

$$\Phi_n(A, B) = a_i b_j s_{i+j}.$$

De même on a $AB = X^{i+j}$, donc

$$S_n(AB) = \sum_{k=0}^{2n} c_k s_k,$$

où les c_k sont nuls, sauf $c_{i+j} = 1$, donc $S_n(AB) = c_{i+j}$. Ainsi, on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 : *$

$$S_n(X^i \cdot X^j) = \Phi_n(X^i, X^j).$$

Soit maintenant $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, et $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j$. Alors, par linéarité de S_n et par bilinéarité de Φ_n et du produit, on a :

$$\begin{aligned} S_n(AB) &= S_n \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j X^i \cdot X^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j S_n(X^i \cdot X^j) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \Phi_n(X^i, X^j) \\ &= \Phi_n \left(\sum_{i=0}^n a_i X^i, \sum_{j=0}^n b_j X^j \right) = \Phi_n(A, B). \end{aligned}$$

2. Deux cas particuliers

(a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_1(aX + b, aX + b) &= b^2 s_0 + (ab + ba) s_1 + a^2 s_2 = b^2 + 2abs_1 + a^2 s_2 \\ &= (b + as_1)^2 + a^2 s_2 - a^2 s_1^2 = (b + 2as_1)^2 + a^2 (s_2 - s_1^2). \end{aligned}$$

- Si $s_2 - s_1^2 > 0$, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) \geq 0,$$

et on a égalité si et seulement si $b + 2as_1 = 0$ et $a = 0$ (car une somme de termes positifs est nul si et seulement chaque terme est nul). Ainsi $a = b = 0$. Comme tout polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ s'écrit sous la forme $aX + b$, on en déduit la définie positivité de Φ_1

- Réciproquement, si $s_2 - s_1^2 \leq 0$, en prenant $a = 1$ et $b = -2s_1$, il vient :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = s_2 - s_1^2 \leq 0,$$

ce qui contredit soit la positivité soit le caractère défini, suivant que cette égalité est stricte ou non. Ainsi, Φ_n n'est pas un produit scalaire.

Par conséquent, Φ_n est un produit scalaire si et seulement si $s_2 - s_1^2 > 0$.

(b) De même, étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_2(aX^2 + bX + c, aX^2 + bX + c) = c^2 s_0 + (bc + cb)s_1 + (ac + b^2 + ca)s_2 + (ab + ba)s_3 + a^2 s_4 = c^2 + (b^2 + 2ac)s_2 + a^2 s_4.$$

On effectue une mise sous forme canonique, comme dans la question précédente :

$$\Phi_2(aX^2 + bX + c, aX^2 + bX + c) = (c + as_1)^2 + b^2 s_2 + a^2 (s_4 - s_1^2).$$

- Si $s_2 > 0$ et $s_4 - s_1^2 > 0$, alors cette expression est toujours positive, et nulle si et seulement si $c + as_1 = 0$, $b = 0$ et $a = 0$, donc $a = b = c = 0$. Ainsi, dans ce cas Φ_2 est définie positive, c'est donc un produit scalaire.
- Si $s \leq 0$, alors, en posant $b = 1$, $a = c = 0$, on obtient :

$$\Phi_2(X, X) = s_2 \leq 0,$$

ce qui contredit soit la positivité, soit le caractère défini.

- Si $s_4 - s_1^2 \leq 0$, en posant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -s_1$, encore une fois, on trouve une contradiction soit à la positivité soit au caractère défini.

Donc Φ_2 est un produit scalaire si et seulement si $s_2 > 0$ et $s_4 - s_1^2 > 0$.

3. Deux exemples

(a) i. Soit $Q = \sum_{j=0}^{2n} q_j X^j$. On a

$$S_n(Q) = \sum_{j=0}^{2n} q_j s_j = \sum_{j=0}^{2n} q_j \sum_{i=1}^d \alpha_i^k p_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{2n} q_j \alpha_i^k p_i = \sum_{i=1}^d p_i Q(\alpha_i).$$

ii. On a alors, pour tout $A \in E_n$,

$$\Phi_n(A, A) = S_n(A^2) = \sum_{i=1}^d p_i A^2(\alpha_i) \geq 0,$$

l'égalité étant obtenue si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad A^2(\alpha_i) = 0 \quad \text{donc:} \quad A(\alpha_i) = 0,$$

puisque les p_i sont strictement positifs.

L'application Φ_n est donc positive, et de plus, si $d > n$, les égalités $A^2(\alpha_i) = 0$ imposent, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $A(\alpha_i) = 0$, donc $A = 0$, puisque A a alors strictement plus de racines que son degré.

Ainsi, si $d > n$, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire. Montrons que la condition suffisante $d > n$ est aussi une condition nécessaire. Pour cela, supposons que $d \leq n$, et considérons le polynôme non nul

$$A = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i).$$

Ce polynôme est bien dans E_n (puisque $d \leq n$) et :

$$\Phi_n(A, A) = \sum_{i=1}^d p_i A^2(\alpha_i) = 0.$$

Comme A n'est pas le polynôme nul, cela contredit le caractère défini, donc Φ_n n'est dans ce cas pas un produit scalaire.

Conclusion : Φ_n est un produit scalaire si et seulement si $d > n$.

- (b) i. C'est la version continue du cas discret précédent. On reprend le même raisonnement. D'après la question 1, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique. Il suffit donc de vérifier qu'elle est définie positive. Soit

$$A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ et posons : } B = A^2 = \sum_{j=0}^{2n} b_j X^j$$

un élément de E_n . Alors

$$\Phi_n(A, A) = S_n(A^2) = \sum_{j=0}^{2n} b_j s_j = \sum_{j=0}^{2n} b_j \int_0^1 t^j f(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{2n} b_j t^j f(t) dt,$$

par linéarité de l'intégrale, les différentes intégrales en jeu n'étant pas impropre, puisque f est continue sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$\Phi_n(A, A) = \int_0^1 A^2(t) f(t) dt.$$

Comme f est une densité, f est positive, donc $A^2 f$ aussi. Ainsi, par positivité de l'intégrale, pour tout $A \in E_n$, $\Phi_n(A, A) \geq 0$, donc Φ_n est positive.

De plus, si $\Phi_n(A, A) = 0$, alors, puisque $A^2 f$ est positive et **continue** sur $[0, 1]$, cela implique que $A^2 f$ est la fonction nulle sur $[0, 1]$. On ne peut pas conclure directement que A^2 est nulle sur $[0, 1]$ (ce qui est faux en général, cela dépend de f). En revanche, f étant une densité, nulle en dehors de $[0, 1]$, il est nécessaire que f ne soit pas identiquement nulle sur $[0, 1]$ (sinon l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être égale à 1). Ainsi, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) > 0$. Puisque f est **continue**, cette inégalité stricte est valable sur tout un intervalle : plus précisément, par définition de la continuité, en prenant $\varepsilon = f(x) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall y \in [0, 1] \cap]x - \delta, x + \delta[, f(y) > f(x) - \varepsilon = 0.$$

Ainsi, f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 1] \cap]x - \delta, x + \delta[$. L'égalité $A^2 f = 0$ amène alors que le polynôme A est identiquement nul sur cet intervalle. Or, cet intervalle est non vide (il contient au moins x) et est un voisinage de x (sauf si $x = 0$ ou $x = 1$, mais dans ce cas, il s'agit d'un voisinage à droite ou à gauche et la conclusion est encore valide), donc il n'est pas réduit au singleton $\{x\}$. Or, un intervalle non vide et non réduit à un singleton possède une infinité d'éléments. Ainsi, le polynôme A admet une infinité de racines, donc $A = 0$.

Ainsi, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire.

- ii. Il faut essayer de voir ce cas comme un cas particulier de la question précédente. C'est le cas particulièrement simple où Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors f est bien nulle sur $]-\infty, 0[\cap]1, +\infty[$, et constante (donc continue) sur $[0, 1]$. Les conditions de la question précédente sont satisfaites. De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a

$$s_k = \int_0^1 t^k f(t) dt = \int_0^1 t^k = \frac{1}{k+1}.$$

Cela correspond bien à la suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ décrite dans l'énoncé. D'après la question (i), l'application Φ_n associée est un produit scalaire.

4. (a) Soit P un polynôme positif. Soit r une racine réelle de P , et α sa multiplicité. Il existe alors un polynôme Q , donc r n'est pas racine, tel que

$$P(X) = (X - r)^\alpha Q(X).$$

Comme r n'est pas racine de Q , $Q(r)$ est non nul. Puisque Q est continue, on obtient donc :

$$P(x) \underset{r}{\sim} Q(r)(x - r)^\alpha.$$

Ainsi, $P(x)$ est, au voisinage de r , du même signe (strict) que $Q(r)(x - r)^\alpha$. Or, si α est impair, $Q(r)(x - r)^\alpha$ change de signe en r , donc P ne garde pas un signe constant, ce qui contredit la positivité de P . Donc α est pair.

- (b) Soit P un polynôme de degré 2. Posons $P = aX^2 + bX + c$. Comme P est de signe constant son discriminant Δ est négatif ou nul. De plus, comme P est positif, $a \geq 0$.

Ainsi, en effectuant une mise sous forme canonique,

$$P = a \left(X - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = A^2 + B^2,$$

où :

$$A = \sqrt{a} \left(X - \frac{b}{2a} \right) \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}.$$

Ainsi B est un polynôme constant, bien défini de la sorte puisque $\Delta \leq 0$, et $a \geq 0$.

- (c) Vérifions d'abord l'égalité donnée en indication. Soient A, B, C, D quatre polynômes. On a :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = A^2C^2 + B^2C^2 + A^2D^2 + B^2D^2.$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 &= A^2C^2 + B^2D^2 + 2ABCD + A^2D^2 + B^2C^2 - 2ABCD \\ &= A^2C^2 + B^2C^2 + A^2D^2 + B^2D^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2,$$

Commençons par montrer qu'un polynôme positif P sans racine réelle est somme de deux carrés de polynômes. D'après le résultat admis du début de la question 4 (qui n'est autre que la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, que vous connaissez comme résultat du cours), puisque P n'a pas de racine réelle, et en factorisant tous les termes de degré 2 par leur coefficient dominant a_i , il existe $p \in \mathbb{N}$ et des réels $b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_p$ tels que

$$P = a \cdot \prod_{i=1}^p (X^2 + b_iX + c_i),$$

les discriminants de ces différents polynômes étant négatifs (strictement puisqu'ils n'ont pas de racine réelle). De plus, a est positif, puisque P est positif.

On montre l'existence d'une décomposition sous la forme $A^2 + B^2$ par récurrence sur p .

Si $p = 0$, P est un polynôme constant positif, $P = a$, donc $P = A^2 + B^2$, où $A = \sqrt{a}$ et $B = 0$. Si $p = 1$, on est ramené au cas de la question précédente (polynôme positif de degré 2).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour $p - 1$, et considérons

$$P = a \cdot \prod_{i=1}^p (X^2 + b_iX + c_i) = \left(a \cdot \prod_{i=1}^{p-1} (X^2 + b_iX + c_i) \right) (X^2 + b_pX + c_p).$$

Les différents polynômes de degré 2 étant sans racine et positifs, les deux facteurs de ce produit sont des polynômes positifs, le premier relevant de l'hypothèse de récurrence, le second de l'initialisation pour $p = 1$. Ainsi, il existe des polynômes A, B, C, D tels que

$$a \cdot \prod_{i=1}^{p-1} (X^2 + b_iX + c_i) = A^2 + B^2 \quad \text{et} \quad X^2 + b_pX + c_p = C^2 + D^2$$

Ainsi

$$P = (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Ainsi, en posant $A_1 = AC + BD$ et $B_1 = AD - BC$, on obtient bien $P = A_1^2 + B_1^2$, d'où la propriété au rang p .

D'après le principe de récurrence, tout polynôme positif P sans racine réelle est somme de deux carrés.

Soit maintenant P un polynôme positif quelconque. Alors, P s'écrit, toujours d'après la décomposition donnée en début de question 4, sous la forme

$$P = \prod_{i=1}^r (X - \zeta_i)^{m_i} Q,$$

où Q est un polynôme sans racine réelle. De plus, d'après 4(a), les multiplicités m_i sont toutes paires, donc il existe n_i tels que $m_i = 2n_i$. Ainsi, en posant

$$C = \prod_{i=1}^r (X - \zeta_i)^{n_i},$$

on a $P = C^2 Q$. Comme P est positif, Q l'est aussi, et comme il n'a pas de racine réelle, l'argument précédent montre qu'il existe A et B tels que

$$Q = A^2 + B^2.$$

Alors : $P = C^2(A^2 + B^2) = (AC)^2 + (BC)^2$, d'où l'existence d'une telle décomposition.

- (d) Supposons que Φ_n est un produit scalaire. Alors soit P un polynôme positif de E_n . Il existe donc A et B deux polynômes tels que $P = A^2 + B^2$. Ainsi :

$$S_n(P) = S_n(A^2 + B^2) = S_n(A^2) + S_n(B^2),$$

par linéarité de S_n . Par conséquent, d'après la question 1(b),

$$S_n(P) = \Phi_n(A, A) + \Phi_n(B, B).$$

Comme Φ_n est un produit scalaire $\Phi_n(A, A) \geq 0$ et $\Phi_n(B, B) \geq 0$, et comme $P \neq 0$ (condition donnée dans la définition d'un polynôme positif), A et B ne peuvent pas être tous les deux nuls, donc Φ_n étant définie, soit $\Phi_n(A, A) > 0$, soit $\Phi_n(B, B) > 0$. En sommant les deux, on obtient donc :

$$S_n(P) > 0.$$

Réciproquement, supposons que pour tout polynôme positif P , $S_n(P) > 0$. Alors soit $A \in E_n$. Si $A = 0$, on a $\Phi_n(A, A) = 0$, et si $A \neq 0$, alors A^2 est positif, donc :

$$\Phi_n(A, A) = S_n(A^2) > 0.$$

Ainsi, pour tout A , $\Phi_n(A, A) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$. Donc Φ_n est définie positive. Comme Φ_n est bilinéaire symétrique d'après la question 1, il en résulte que Φ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

- 5• (a) La famille $(1, X, X^2)$ est une base de E_2 . En particulier elle est libre, et de plus, le principe d'orthonormalisation fournira une base orthonormale de E_2 . Soit (f_1, f_2, f_3) la base obtenue de $(1, X, X^2)$ par l'orthonormalisation de Schmidt.
- On a

$$\|1\|^2 = \Phi_2(1, 1) = S_n(1) = 1, \quad \text{donc:} \quad \|1\| = 1.$$

Ainsi, $f_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$.

- On a $f_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$, où

$$u_2 = X - \Phi_2(X, f_1)f_1 = X - \Phi_2(X, 1) = X - S_2(X) = X - \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\|u_2\|^2 = \Phi_2(u_2, u_2) = S_2(u_2^2) = S_2\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = S_2\left(X^2 - X + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Par conséquent,

$$f_2 = \sqrt{3}(2X - 1).$$

- On a $f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$, où

$$\begin{aligned} u_3 &= X^2 - \Phi_2(X^2, f_1)f_1 - \Phi_2(X^2, f_2)f_2 = X^2 - S_2(X^2) - 3S_2(2X^3 - X^2)(2X - 1) \\ &= X^2 - \frac{1}{3} - 3\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right)(2X - 1) = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2X - 1) \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Et voilà l'astuce de la mort qui tue pour calculer la norme de ce vecteur : si on ne s'est pas trompé dans les calculs, ce polynôme est orthogonal à f_1 et f_2 , donc $\Phi_2(u_3, f_1) = \Phi_2(u_3, f_2) = 0$. Or :

$$\Phi_2(u_3, u_3) = \Phi_2\left(X^2 - X + \frac{1}{6}, X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \Phi_2\left(X^2 - X + \frac{1}{6}, X^2 - \frac{1}{2}(2X - 1) - \frac{1}{3}\right),$$

et en utilisant la bilinéarité et le fait que $\Phi_2(u_3, f_1) = \Phi_2(u_3, f_2) = 0$, il vient

$$\Phi_2(u_3, u_3) = \Phi_2\left(X^2 - X + \frac{1}{6}, X^2\right) = S_2\left(X^4 - X^3 + \frac{X^2}{6}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}.$$

Ainsi,

$$f_3 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).$$

Bien sûr, le calcul peut se faire sans cette astuce...

- (b) Ce n'est rien d'autre que l'écriture matricielle d'une forme bilinéaire : M est la matrice de Φ_2 relativement à la base canonique :

$$\begin{aligned} M = \text{Mat}_{\text{b.c.}} \Phi_2 &= \begin{pmatrix} \Phi_2(1, 1) & \Phi_2(1, X) & \Phi_2(1, X^2) \\ \Phi_2(X, 1) & \Phi_2(X, X) & \Phi_2(X, X^2) \\ \Phi_2(X^2, 1) & \Phi_2(X^2, X) & \Phi_2(X^2, X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2(1) & S_2(X) & S_2(X^2) \\ S_2(X) & S_2(X^2) & S_2(X^3) \\ S_2(X^2) & S_2(X^3) & S_2(X^4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) La formule de changement de base de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_2) = {}^t T M T,$$

où T est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est bien triangulaire.

Or, comme $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base orthonormale pour Φ_2 , on obtient : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_2) = I_3$. D'où l'identité demandée.

6. (a) On a bien sûr $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$, donc $\deg P_0 = 0$.
On a, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^i) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_i).$$

Soit donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\text{Vect}(P_0, \dots, P_{i-1}) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{i-1}) = \mathbb{R}_{i-1}[X].$$

Ainsi :

- si $\deg P_i < i$, on aurait $\text{Vect}(P_0, \dots, P_i) = \mathbb{R}_{i-1}[X] \neq \mathbb{R}_i[X]$, d'où une contradiction ;
- si $\deg P_i > i$, alors $\text{Vect}(P_0, \dots, P_i) \not\subset \mathbb{R}_i[X]$, d'où une contradiction.

Donc, nécessairement, $\deg(P_i) = i$.

- (b) On a

$$\Phi_n(P_n, 1) = 0 = S_n(P_n).$$

Or, d'après la question 4(d), puisque Φ_n est un produit scalaire, si P_n est un polynôme positif (P_n étant nécessairement différent du polynôme nul, puisqu'il est de degré n), on a $S_n(P_n) > 0$, et de même, si P_n est négatif, $-P_n$ est positif, donc $S_n(P_n) = -S_n(-P_n) < 0$. Cela contredit l'égalité $S_n(P_n) = 0$.

Ainsi, P_n n'étant ni positif ni négatif sur $\mathbb{R}$, il ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Or, si toutes les racines réelles de P_n sont de multiplicité paire, tous les facteurs de la décomposition de P_n en facteurs irréductibles (donnée en début de question 4) sont de signe constant (les premiers termes s'écrivant comme des puissances paires), et P_n garde un signe constant. Cela n'étant pas le cas, P_n admet nécessairement au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

- (c) Puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont racines de P_n , on peut factoriser P_n par $\prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$. Il existe donc R un polynôme tel que

$$P_n = R \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i).$$

Soit α une racine réelle de R . Alors α est racine de P_n .

- Si α est racine de P_n de multiplicité paire, alors on n'a pas mis $(X - \alpha)$ en facteur, donc α est encore racine de même multiplicité (paire) de R ;
- Si α est racine de P_n de multiplicité impaire, puisqu'on a dans ce cas mis $(X - \alpha)$ en facteur, α est racine de multiplicité un de moins (donc paire) de R .

Ainsi, toutes les racines réelles de R sont de multiplicité paire. L'argument donné dans la question précédente permet de conclure que R est alors de signe constant, et est non nul (puisque P_n est non nul). Ainsi, R ne peut pas être à la fois négatif et positif.

- Si R est positif, on pose $Q = R$ et $\varepsilon = 1$.
- Si R est négatif, on pose $Q = -R$ et $\varepsilon = -1$.

Alors Q est un polynôme positif, et

$$P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i),$$

Par ailleurs, on a :

$$\Phi_n \left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i) \right) = S_n \left(P_n \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i) \right) = \varepsilon S_n \left(Q \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^2 \right).$$

Or, $Q \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^2$ est un polynôme positif, donc, d'après la question 4(d),

$$S_n \left(Q \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^2 \right) > 0, \quad \text{donc:} \quad \Phi_n \left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i) \right) \neq 0.$$

Raisonnons par l'absurde. Si $k < n$, alors

$$\prod_{i=1}^k (X - \alpha_i) \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}).$$

Or, $P_n \perp \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$, donc on obtiendrait

$$\Phi_n \left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i) \right) = 0,$$

d'où une contradiction. Ainsi, $k \geq n$, et comme $k \leq \deg P_n \leq n$, on obtient finalement $k = n$.

7. (a) On a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $L_i(\alpha_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(\alpha_j) = 1$ si $i = j$. Montrons la liberté de $(L_1, \dots, L_n)$ en considérant des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0.$$

D'après la remarque qui précède, en évaluant en α_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il vient : $\lambda_i = 0$. Cela étant vrai pour tout choix de $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est bien libre. De plus son cardinal est égal à la dimension de E_{n-1} , et ses éléments sont constitués d'éléments de E_{n-1} . Donc il s'agit d'une base de E_{n-1} .

Soit $R \in E_{n-1}$. Alors, puisque $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1} (donc une famille génératrice), il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$R = \lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En évaluant cette égalité en α_i , il vient $R(\alpha_i) = \lambda_i$. Ainsi, on a bien

$$R = \sum_{i=1}^n R(\alpha_i) L_i.$$

En particulier, pour R égal au polynôme constant égal à 1, on obtient :

$$1 = \sum_{i=1}^n L_i.$$

- (b) Soit A un polynôme, élément de E_{2n-1} .

- i. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = P_n Q + R$, avec $\deg(R) < \deg(P_n) = n$, donc $R \in E_{n-1}$.
De plus, si $\deg(Q) \geq n$, alors $\deg(P_n Q) \geq 2n$, et comme $\deg(R) < n < 2n$, on obtiendrait $\deg(A) \geq 2n$, ce qui contredit l'hypothèse $A \in E_{2n-1}$. Ainsi, $\deg(Q) < n$, donc $Q \in E_{n-1}$.

- ii. On a :

$$S_n(A) = S_n(P_n Q + R) = S_n(P_n Q) + S_n(R) = \Phi_n(P_n, Q) + S_n(R).$$

Or, $Q \in E_{n-1} = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$, et, puisque $(P_0, \dots, P_{n-1})$ est orthonormale, $P_n \perp E_{n-1}$. Donc $\Phi_n(P_n, Q) = 0$. Ainsi

$$S_n(A) = S_n(R).$$

De plus puisque $R \in E_{n-1}$, on peut écrire, d'après la question 7(a) :

$$S_n(A) = S_n(R) = S_n \left(\sum_{i=1}^n R(\alpha_i) L_i \right) = \sum_{i=1}^n R(\alpha_i) S_n(L_i).$$

Enfin, puisque les α_i sont racines de P_n , en évaluant l'égalité $A = P_n Q + R$ en α_i , il vient $A(\alpha_i) = R(\alpha_i)$, d'où, au final :

$$S_n(A) = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i) S_n(L_i).$$

(c) En prenant A égal au polynôme constant égal à 1, il vient :

$$1 = S_n(1) = \sum_{i=1}^n S_n(L_i) = \sum_{i=1}^n p_i,$$

la première égalité provenant de l'hypothèse $s_0 = 1$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$S_n(L_k^2) = \sum_{i=1}^n L_k^2(\alpha_i) S_n(L_i) = S_n(L_k),$$

puisque $L_k^2(\alpha_i) = 0$ si $i \neq k$, et $L_k^2(\alpha_i) = 1$ si $i = k$. Ainsi

$$p_k = S_n(L_k) = S_n(L_k^2) = \Phi_n(L_k, L_k) > 0,$$

puisque le produit scalaire est défini positif.

(d) Ainsi, les réels $(p_1, \dots, p_n)$ sont positifs et de somme égale à 1, ils définissent donc une loi de probabilité : il existe donc une variable aléatoire Y à valeurs dans $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(Y = \alpha_k) = p_k$. On a alors, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, d'après le théorème de transfert,

$$E(Y^k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k p_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k S_n(L_i) = S_n(X^k) = s_k,$$

l'avant-dernière égalité provenant de la question 7(b)ii.

(e) On a trouvé $P_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$, donc les racines de P_2 sont $\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}$. Ainsi, Y est une variable prenant la valeur α_1 avec une certaine probabilité p , et α_2 avec la probabilité $1 - p$. Comme ces deux valeurs sont centrées en $\frac{1}{2}$, pour obtenir $E(Y) = s_1 = \frac{1}{2}$, on a nécessairement $p = \frac{1}{2}$.

Un calcul sans grande difficulté permet de vérifier qu'on a bien alors $E(X^2) = \frac{1}{3}$ et $E(X^3) = \frac{1}{4}$. Remarquez que notre construction n'impose pas l'égalité de $E(X^4)$ avec s_4 (on s'arrête à l'indice $2n-1$ dans la question 7(d)).