

Concours Blanc n° 1 – Épreuve 2 (DS 5 – 4 heures)

Problème 1 – (Lyon 2005)

Partie I – Calcul de la somme d'une série convergente

1. L'intégrande étant continue sur $[0, \pi]$, l'intégrale n'est pas impropre. Soit u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, définies par :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \quad \text{donc:} \quad u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = \cos(nt).$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\sin(nt)}{n} \, dt = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) \, dt$$

On effectue une deuxième intégration par parties, en posant cette fois les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\forall t \in [0, \pi], \quad w(t) = \frac{t}{\pi} - 1 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \quad \text{donc:} \quad w'(t) = \frac{1}{\pi} \quad \text{et} \quad z'(t) = \sin(nt).$$

Ainsi,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \left[\sin(nt) \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et $t \in]0, \pi]$. Alors : $e \neq 1$, et le quotient considéré est bien défini. De plus, en mettant à chaque fois la moitié de l'angle en facteur (procédé de symétrisation) :

$$\frac{1 - e^{i m t}}{1 - e^{i t}} e^{i t} = \frac{e^{i \frac{m t}{2}}}{e^{i \frac{t}{2}}} \cdot \frac{e^{-i \frac{m t}{2}} - e^{i \frac{m t}{2}}}{e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}} \cdot e^{i t} = \frac{e^{i \frac{m t}{2}} e^{i t}}{e^{i \frac{t}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{t m}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{t m}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot e^{\frac{i(m+1)t}{2}}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \cos(nt) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^m e^{i n t} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i t} - e^{i(m+1)t}}{1 - e^{i t}} \right) \quad (\text{somme géométrique de raison } e^{i t} \neq 1) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\sin \frac{t m}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot e^{\frac{i(m+1)t}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{t m}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i(m+1)t}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{t m}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{(m+1)t}{2}. \end{aligned}$$

3. Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ donnée dans l'énoncé, et v la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ définie par :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad v(t) = -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) \quad \text{donc:} \quad v'(t) = \sin(\lambda t).$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt = -\frac{1}{\lambda} \left[u(t) \cos(\lambda t) \right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) \, dt.$$

Or, la fonction u est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \pi]$, donc u est bornée. Il existe donc M tel que $|u| \leq M$ sur $[0, \pi]$. De même, u' est continue sur $[0, \pi]$, donc il existe M' tel que $|u'| \leq M'$ sur $[0, \pi]$. Comme les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont à valeurs dans $[0, 1]$, il vient alors, à l'aide de l'inégalité triangulaire pour les somme, puis de l'inégalité triangulaire pour les intégrales, pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt \right| &\leq \left| \frac{1}{\lambda} \left[u(t) \cos(\lambda t) \right]_0^\pi \right| + \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (|u(\pi) \cos(\lambda \pi)| + |u(0)|) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t) \cos(\lambda t)| \, dt \\ &\leq \frac{2M}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi M' \, dt \\ &\leq \frac{2M + M'}{\lambda}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Donc, d'après le théorème d'encadrement, l'intégrale de l'énoncé admet une limite lorsque λ tend vers $+\infty$, et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt = 0.$$

4. La fonction f est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$, en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle.

On montre rapidement que f est continue en 0 par un calcul d'équivalent :

$$f(t) \underset{0}{\sim} -t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t} = -1,$$

donc la limite à droite de f en 0 est $-1 = f(0)$, d'où la continuité de f en 0.

De plus,

$$\forall t \in]0, \pi], \quad f'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Or, lorsque t est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos \frac{t}{2} &= \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \\ &= \frac{t^2}{\pi} - t - \frac{t^2}{2\pi} + t + o(t^2) = \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Par conséquent, f' admet une limite finie en 0.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, et que f' admet une limite en 0, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la restriction de f à $]0, \pi]$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Ce prolongement par continuité est évidemment f elle-même, puisque f est continue en 0, ainsi qu'on l'a montré plus haut. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt \\
&= \int_0^\pi \left(\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{n=1}^m \cos(nt) \right) \, dt \\
&= \int_0^\pi \left(\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin \frac{tm}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{(m+1)t}{2} \right) \, dt \quad (\text{question 2}) \\
&= \int_0^\pi 2f(t) \sin \frac{tm}{2} \cos \frac{(m+1)t}{2} \, dt \\
&= \int_0^\pi f(t) \left(\sin \frac{(2m+1)t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt
\end{aligned}$$

- (b) D'après la question 3, cette expression admet une limite lorsque m tend vers $+\infty$ (puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ d'après la question 4). Ainsi, la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ admet une limite finie (donc la série converge), et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II – Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. (a) Puisque x et y sont positifs, les deux séries sont à termes positifs. De plus,

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

Or, les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ sont convergentes, donc d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

- (b) Si $x = 0$, le terme général de la série est nul, donc la série est évidemment convergente.

Si $x \neq 0$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2},$$

d'où la convergence, obtenue à nouveau par comparaison à une série de Riemann à l'aide du théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs.

2. • $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
 • Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1},$$

puisqu'il s'agit d'une somme télescopique. En passant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient $S(1) = 1$.

3. (a) Soit $(x, y) \in [0, +\infty[$. Puisque les deux séries sont convergentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+y-n-x}{(n+x)(n+y)} \\ &= (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}. \end{aligned}$$

- (b) Soit $(x, y) \in [0, +\infty]^2$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque x, y et n sont positifs,

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, d'après la question précédente, et le résultat de la partie I,

$$|S(y) - S(x)| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} |y - x|.$$

- (c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors en faisant tendre dans l'inégalité précédente le réel y vers x , le terme de droite tend vers 0, donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{y \rightarrow x} |S(y) - S(x)| = 0, \quad \text{donc:} \quad \lim_{y \rightarrow x} S(y) = S(x).$$

Ainsi, S est continue en x . Cela étant vrai pour tout $x \in [0, +\infty[$, S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. (a) Soit $(x, y) \in [0, +\infty]^2$ tel que $x \neq y$. Alors

$$\frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right),$$

puisque les deux séries sont convergentes. Ainsi

$$\frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+x-n-y}{(n+x)^2(n+y)} = (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

De plus, toutes les variables étant positives, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3},$$

donc, en passant aux valeurs absolues,

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Et $|x - y| = |y - x|$, évidemment...

- (b) Rebelotte. La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, et $|y - x|$ tend vers 0 lorsque y tend vers x , donc

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = 0 \quad \text{donc:} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{S(y) - S(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2},$$

cette dernière égalité affirmant l'existence de cette limite, donc par définition la dérivabilité de S .

On obtient bien :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

$$(c) \bullet S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\bullet S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

5. On obtient immédiatement que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S''(x) < 0$, donc S est concave sur $[0, +\infty[$, d'après la caractérisation de la concavité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

6. (a) Puisque $x > -1$, la fonction φ est continue sur $[1, +\infty[$, donc la seule impropreté de l'intégrale est en $+\infty$.

Puisque $x > 0$, la fonction φ est positive sur $[1, +\infty[$. De plus au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t) = \frac{x}{t(t+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2} dt$ est à un facteur multiplicatif constant près, une intégrale de Riemann de paramètre 2 en $+\infty$, donc converge. D'après le théorème de comparaison par équivalents, les intégrandes étant positives, $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'expression obtenue pour φ dans la question précédente montre que φ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc sur $[n, n+1]$. Ainsi,

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n),$$

et par conséquent, en intégrant cette encadrement sur $[n, n+1]$:

$$\varphi(n+1) = \int_n^{n+1} \varphi(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(n) dt = \varphi(n).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On obtient donc

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n),$$

donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\left(\sum_{n=1}^{N+1} \varphi(n) \right) - \varphi(1) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n).$$

Les deux séries sont convergentes (ce sont les séries définissant $S(x)$), et l'intégrale du milieu aussi. Ainsi, les limites des trois membres existent lorsque N tend vers $+\infty$, et on obtient, par passage à la limite,

$$S(x) - 1 \leq S(x) - \varphi(1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x),$$

la première inégalité découlant du fait que :

$$\varphi(1) = 1 - \frac{1}{1+x} \leq 1.$$

D'où, en séparant les deux inégalités et en isolant le terme $S(x)$:

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

(c) Soit $A \in [1, +\infty[$. On a :

$$\int_1^A \varphi(t) dt = \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{dt}{t+x} = \ln A - \ln(A+x) + \ln(1+x) = \ln \frac{A}{A+x} + \ln(1+x).$$

Le premier logarithme tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, donc l'intégrale converge, et

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$$

En divisant l'inégalité de la question 6(b) par $\ln x$ (pour $x > 1$) et en faisant tendre x vers $+\infty$, les deux membres extérieurs tendent alors vers 1, donc aussi le terme interne, d'après le théorème d'encadrement, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = 1 \quad \text{donc:} \quad S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x.$$

7. (a) On obtient :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

(b) Je vous laisse faire. N'oubliez pas la concavité et la valeur de S en 1. Tracez aussi la demi-tangente en 0 (puisque l'on vous a fait calculer $S'(0)$), approximativement, bien entendu.

Problème 2 –

Partie I – Étude d'un exemple

1. (a) X_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (les probabilités ponctuelles de X_2 étant nulles, puisqu'il s'agit d'une variable à densité) :

$$F_{X_2'}(t) = P(X_2' \leq t) = P(X_2 \geq -t) = 1 - P(X_2 < -t) = 1 - P(X_2 \leq -t).$$

On obtient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_2'}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 1+t & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On reconnaît l'expression de la fonction de répartition d'une variable suivant une loi uniforme sur $[-1, 0]$.

(b) Des densités de X_1 et de $-X_2 = X_2'$ sont :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{X_2'}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-1, 0] \\ 1 & \text{si } t \in [-1, 0] \end{cases}$$

Déterminons le produit de convolution de ces deux fonctions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1} \star f_{X_2'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2'}(x-t) dt = \int_0^1 f_{X_2'}(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_{X_2'}(u) du,$$

(changement de variables affine $u = x - t$)

- Si $x < -1$ ou si $x > 1$, $\int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) \, du = 0$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$, $\int_{x-1}^x f_{X'_2}(u) \, du = \int_{-1}^x 1 \, du = x + 1$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, $\int_{x-1}^0 f_{X'_2}(u) \, du = \int_{x-1}^1 1 \, du = 1 - x$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_1} \star f_{X'_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Cette fonction est continue (presque partout), et, puisque X_1 et X_2 sont indépendants, il en est de même de X_1 et $-X_2$. Ainsi, le produit de convolution ci-dessus est une densité de $X_1 - X_2$.

La fonction de répartition s'obtient par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_1(x) = \int_{-\infty}^x f_{Y_1}(t) \, dt.$$

- Si $x < -1$, alors $\Phi_1(x) = 0$
- Si $x \in [-1, 0]$, alors

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^x (1+t) \, dt = \frac{(1+x)^2}{2},$$

- Si $x \in [0, 1]$,

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^0 (1+t) \, dt + \int_0^x (1-t) \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}.$$

- Si $x > 0$, alors $\Phi_1(x) = 1$.

(c) Tout d'abord, $Z_1(\Omega) = [0, 1]$, donc Φ_2 est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et vaut 1 sur $]1, +\infty[$.

Soit $t \in [0, 1]$. On a :

$$\Phi_2(t) = P(Z_1 \leq t) = P(|Y_1| \leq t) = P(-t \leq Y_1 \leq t) = 1 - \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} = 1 - (1-t)^2.$$

Une densité de Z_1 est obtenue en dérivant presque partout cette expression :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 2(1-t) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

(d) Z_1 ne dépend que de X_1 et X_2 , et les variables X_1 , X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, donc Z_1 et $-X_3$ sont indépendantes.

Une densité de $-X_3$ est la même que $-X_2 = X'_2$. Ainsi, on peut calculer le produit de convolution :

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t) f_{-X_3}(x-t) \, dt = \int_0^1 2-2t f_{-X_3}(x-t) \, dt = \int_{x-1}^x 2(1-x+u) f_{-X_3}(t) \, dt.$$

- Si $x < -1$ ou si $x > 1$, alors $\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = 0$
- Si $x \in [-1, 0]$, alors

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{-1}^x 2(1-x+u) \, du = 1 - x^2$$

- Si $x \in [0, 1]$, alors

$$\varphi_2 \star f_{-X_3}(x) = \int_{x-1}^0 2(1-x+u) \, du = (1-x)^2.$$

Ainsi, cette fonction étant continue presque partout, et Z_1 et $-X_3$ étant indépendantes, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ (1 - x)^2 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

On obtient donc :

$$P(Z_1 - Z_3 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \varphi_3(t) dt = \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La variable Z_1 représente la différence de temps entre le client qui sort le dernier et le client qui sort le premier, entre A_1 et A_2 . Le client A_3 sort en dernier si et seulement si cette différence de temps est moins importante que le temps mis par A_3 , donc si et seulement si $Z_1 - X_2 \leq 0$. Ainsi,

$$P(E) = P(Z_1 - X_3) = \frac{2}{3}.$$

2. Soit T_3 la variable aléatoire égale au temps total passé à la poste par A_3 .

(a) On a $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$.

(b) Soit $Y = \inf(X_1, X_2)$. Tout d'abord, $Y(\Omega) = [0, 1]$, donc f_Y est nulle en dehors de cet intervalle.

Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$P(Y \leq x) = P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(\inf(X_1, X_2) > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x).$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, il vient :

$$P(Y \leq x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) = 1 - (1 - x)^2.$$

Ainsi, une densité de Y est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 2(1 - t) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

On reconnaît φ_2 , la densité de Z_1

(c) Les variables $\inf(X_1, X_2)$ et X_3 sont indépendantes, donc une densité h de T_3 est obtenu par le produit de convolution

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t)f(x - t) dt,$$

où f est une densité de X_3 . Or φ_2 est égal à $2(1 - t)$ sur $[0, 1]$ et nul sinon. De plus $t \mapsto f(x - t)$ est égal à 1 si $t \in [x - 1, x]$ et à 0 sinon. Ainsi,

$$t \mapsto f(t)g(x - t)$$

est égal à $2(1 - t)$ sur $[0, 1] \cap [x - 1, x]$ et nul ailleurs. Par conséquent,

- si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = \emptyset$, donc $h(x) = 0$;
- si $x \in [0, 1[$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = [0, x]$, et par conséquent,

$$h(x) = \int_0^x 2(1 - t) dt = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2.$$

- si $x \in [1, 2]$, $[0, 1] \cap [x - 1, x] = [x - 1, 1]$, et par conséquent,

$$h(x) = \int_{x-1}^1 2(1 - t) dt = (2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2.$$

La fonction h ainsi obtenue est continue au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, donc il s'agit d'une densité de $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$.

(d) Le support de h étant borné, la variable T_3 admet une espérance, et

$$\begin{aligned} E(T_3) &= \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (4x - 4x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 2(4 - 1) - \frac{4}{3}(8 - 1) + \frac{1}{4}(16 - 1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 6 - \frac{28}{3} + \frac{15}{4} = \frac{8 - 3 + 72 - 112 + 45}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Partie II – Cas où les opérations sont de deux types différents

1. (a) Vous aurez compris qu'il s'agit de la fonction de densité et non de la fonction de répartition. Tout d'abord, $X(\Omega) = [0, 2]$, donc si $x \notin [0, 2]$, $f_X(t) = 0$.

Soit $x \in [0, 2]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $(B, \overline{B})$, où B est l'événement : « A vient pour une opération postale »,

$$P(X \leq x) = P_B(X \leq x)P(B) + P_{\overline{B}}(X \leq x)P(\overline{B}).$$

- Si $x \in [0, 1]$,

$$P(X \leq x) = px + (1 - p)\frac{x}{2} = \frac{1+p}{2} \cdot x.$$

- Si $x \in [1, 2]$,

$$P(X \leq x) = p + (1 - p)\frac{x}{2}.$$

Par dérivation, on obtient bien une densité :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 2] \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } p \in [0, 1[\\ \frac{1-p}{2} & \text{si } p \in [1, 2]. \end{cases}$$

- (b) L'espérance de X existe car f_X est à support borné, et :

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{1+p}{2} dx + \int_1^2 x \frac{1-p}{2} dx = \frac{1+p}{4} + \frac{3}{2} \frac{1-p}{2} = 1 - \frac{p}{2}.$$

2. (a) • Tout d'abord, la fonction de répartition de $-X_2$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-X_2}(x) = P(-X_2 \leq x) = P(X_2 \geq -x) = 1 - P(X_2 \leq -x),$$

donc une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{-X_2}(x) = f_{X_2}(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1-p}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

- Ainsi, les variables X_1 et $-X_2$ étant indépendantes, sous réserve de continuité pp du résultat, une densité de $X_1 - X_2$ est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_{X_1 - X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(x - t) dt \\ &= \frac{1+p}{2} \int_0^1 f_{-X_2}(x - t) dt + \frac{1-p}{2} \int_1^2 f_{-X_2}(x - t) dt \\ &= \frac{1+p}{2} \int_{x-1}^x f_{-X_2}(u) du + \frac{1-p}{2} \int_{x-2}^{x-1} f_{-X_2}(u) du. \end{aligned}$$

Ainsi :

* si $x \leq -2$, $f_{X_1-X_2}(x) = 0$

* si $-2 \leq x \leq -1$,

$$f_{X_1-X_2}(x) = \frac{1+p}{2} \int_{-2}^x \frac{1-p}{2} du = \frac{1-p^2}{4}(x+2),$$

* si $-1 \leq x \leq 0$,

$$\begin{aligned} f_{X_1-X_2}(x) &= \frac{1+p}{2} \left(\int_{x-1}^{-1} \frac{1-p}{2} du + \int_{-1}^x \frac{1+p}{2} du \right) + \frac{1-p}{2} \int_{-2}^{x-1} \frac{1-p}{2} du \\ &= \frac{1+p}{2} \left(-x \frac{1-p}{2} + (x+1) \frac{1+p}{2} \right) + \frac{(1-p)^2}{4}(x+1) \\ &= \frac{1+3p^2}{4}x + \frac{1+p^2}{2}. \end{aligned}$$

* si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} f_{X_1-X_2}(x) &= \frac{1+p}{2} \int_{x-1}^0 \frac{1+p}{2} du + \frac{1-p}{2} \left(\int_{x-2}^{-1} \frac{1-p}{2} du + \int_{-1}^{x-1} \frac{1+p}{2} du \right) \\ &= -\frac{1+3p^2}{4}x + \frac{1+p^2}{2} \end{aligned}$$

* si $1 \leq x \leq 2$,

$$f_{X_1-X_2}(x) = \frac{1-p}{2} \int_{x-2}^0 \frac{1+p}{2} du = \frac{1-p^2}{4}(2-x),$$

* si $x \geq 2$, $f_{X_1-X_2}(x) = 0$.

Cette fonction étant bien continue presque partout (et même partout), nos calculs sont valides.

- On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, P(|X_1 - X_2| \leq x) = P(-x \leq X_1 - X_2 \leq x) = P(X_1 - X_2 \leq x) - P(X_1 - X_2 \leq -x).$$

On obtient donc, par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_{|X_1-X_2|}(x) = f_{X_1-X_2}(x) + f_{X_1-X_2}(-x),$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{|X_1-X_2|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1-p^2}{2}(2-x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Remarquez que si $p = 1$, on retrouve φ_2 de la partie I (cas où toutes les opérations suivent $\mathcal{U}([0, 1])$). De même, si $p = 0$, on retrouve $x \mapsto \frac{1}{2}\varphi_2\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui correspond à un facteur d'échelle 2.

- Encore quelques calculs pour déterminer une densité de $|X_1 - X_2| - X_3$, en calculant le produit de convolution, les variables $|X_1 - X_2|$ et X_3 étant indépendantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_{|X_1-X_2|-X_3}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{|X_1-X_2|}(t) f_{-X_3}(x-t) dt \\ &= \int_0^1 \left(1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}t \right) f_{-X_2}(x-t) dt + \int_1^2 \frac{1-p^2}{2}(2-t) f_{-X_2}(x-t) dt \\ &= \int_{x-1}^x \left(1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}(x-u) \right) f_{-X_2}(u) du + \int_{x-2}^{x-1} \frac{1-p^2}{2}(2-x+u) f_{-X_2}(u) du. \end{aligned}$$

Remarquez que seules les valeurs négatives de x nous intéressent, puisque le but est de calculer $P(|X_1 - X_2| - X_3 \leq 0)$. On obtient donc :

* si $x < -2$, $f_{|X_1-X_2|-X_3}(x) = 0$,

* si $-2 \leq x \leq -1$,

$$\begin{aligned} f_{|X_1-X_2|-X_3}(x) &= \int_{-2}^x \left(1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}(x-u)\right) \frac{1-p}{2} du \\ &= (x+2)(1+p^2) \frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{2} \frac{1+3p^2}{2} \left[\frac{(x-u)^2}{2}\right]_{-2}^x \\ &= \frac{1-p}{2} \left((1+p^2)(x+2) - (1+3p^2) \frac{(x+2)^2}{4} \right) \\ &= \frac{(x+2)(1-p)}{2} \left(\frac{1-p^2}{2} - \frac{1+3p^2}{4} x \right). \end{aligned}$$

* si $-1 \leq x \leq 0$,

$$\begin{aligned} f_{|X_1-X_2|-X_3}(x) &= \int_{x-1}^{-1} \left(1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}(x-u)\right) \frac{1-p}{2} du + \\ &\quad + \int_{-1}^x \left(1 + p^2 - \frac{1+3p^2}{2}(x-u)\right) \frac{1+p}{2} du + \int_{-2}^{x-1} \frac{1-p^2}{2} (2-x+u) \frac{1-p}{2} du \\ &= -x \frac{1-p}{2} (1+p^2) + \frac{1+3p^2}{2} \frac{1-p}{2} \left(\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + (x+1)(1+p^2) \frac{1+p}{2} + \\ &\quad + \frac{1+p}{2} \frac{1+3p^2}{2} \left(0 - \frac{(x+1)^2}{2} \right) + \frac{1-p}{2} \frac{1-p^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \dots = -\frac{x^2}{8} (1+p-p^2+7p^3) + \frac{x}{2} p (1-p^2) + \frac{1}{4} (2+p+p^3). \end{aligned}$$

Et miraculeusement (le miracle m'a occupé plus d'une heure et m'a obligé à refaire 3 fois les calculs...), on retrouve, pour $p = 1$, la fonction φ_3 , et pour $p = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \varphi_3\left(\frac{x}{2}\right)$. Cela nous conforte dans la validité du résultat...

- On obtient donc enfin :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(|X_1 - X_2| - X_3 \leq 0) \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1-p}{2} \left((1+p^2)(x+2) - (1+3p^2) \frac{(x+2)^2}{4} \right) dx + \\ &\quad + \int_{-1}^0 \left(-\frac{x^2}{8} (1+p-p^2+7p^3) + \frac{x}{2} p (1-p^2) + \frac{1}{4} (2+p+p^3) \right) dx \\ &= \frac{1-p}{2} \frac{1+p^2}{2} - \frac{1-p}{2} \frac{1+3p^2}{12} - \frac{1+p-p^2+7p^3}{24} - \frac{p(1-p^2)}{4} + \frac{1}{4} (2+p+p^3) \\ &= \dots = \frac{1}{12} (16 - 6p + 4p^2 + 2p^3) = \frac{1}{12} (8 + p(p-1)(p+3)) \end{aligned}$$

Encore une fois, constatez que pour $p = 1$, on retrouve une probabilité de $\frac{2}{3}$, et pour $p = 0$ également (cette probabilité n'est évidemment pas modifiée par le changement d'échelle!)

- (b) Comme précédemment, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(\inf(X_1, X_2) > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x),$$

et, les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$P(\inf(X_1, X_2) \leq x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - p(X_2 \leq x)).$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\inf(X_1, X_2)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{1+p}{2}x\right)^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - (1-p)^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi, une densité est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\inf(X_1, X_2)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ (1+p) \left(1 - \frac{1+p}{2}x\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (1-p)^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Ainsi, l'espérance existe (le support est borné), et

$$\begin{aligned} E(\inf(X_1, X_2)) &= \int_0^1 x(1+p) \left(1 - \frac{1+p}{2}x\right) dx + \int_1^2 x(1-p)^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1+p}{2} - \frac{(1+p)^2}{6} + \frac{3}{2}(1-p)^2 - \frac{7(1-p)^2}{6} \\ &= \frac{1}{6}(3+3p-1-2p-p^2+9-18p+9p^2-7+14p-7p^2) = \frac{1}{6}(4-3p+p^2). \end{aligned}$$

(c) On calcule également l'espérance de X_3 :

$$E(X_3) = \int_0^1 \frac{1+p}{2}x dx + \int_1^2 \frac{1-p}{2}x dx = \frac{1+p}{4} + \frac{3(1-p)}{4} = \frac{1}{4}(4-2p) = \frac{2-p}{2}.$$

On a alors :

$$E(T_3) = E(\inf(X_1, X_2) + X_3) = E(\inf(X_1, X_2)) + E(X_3) = \frac{1}{6}(4-3p+p^2) + \frac{2-p}{2} = \frac{1}{6}(10-6p+p^2).$$

Constatez encore une fois que pour $p = 1$, on retrouve $E(T_3) = \frac{5}{6}$, alors que pour $p = 0$, on obtient le double (le facteur d'échelle double évidemment l'espérance totale de l'attente).

3. (a) i. Chaque personne arrivant à la poste est confrontée à une épreuve de Bernoulli, dont le succès est de venir pour une opération postale, donc de se diriger vers le guichet 1. Le nombre de personnes passant au guichet avant A_3 est égal au nombre de succès dans les deux épreuves de Bernoulli correspondant aux deux personnes A_1 et A_2 précédant A_3 . Ainsi, N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.
- ii. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $([N = 0], [N = 1], [N = 2])$, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(T_3 \leq x) &= P(T_3 \leq x \mid N = 0)P(N = 0) + P(T_3 \leq x \mid N = 1)P(N = 1) + P(T_3 \leq x \mid N = 2)P(N = 2) \\ &= (1-p)^2 P(T_3 \leq x \mid N = 0) + 2p(1-p)P(T_3 \leq x \mid N = 1) + p^2 P(T_3 \leq x \mid N = 2). \end{aligned}$$

Or, toutes les personnes passant au guichet 1 venant pour une opération postale, leur temps de passage suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi,

- $x \mapsto P(T_3 \leq x \mid N = 0)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, (il n'y a personne avant A_3 , seul son temps de passage est pris en considération)
- $x \mapsto P(T_3 \leq x \mid N = 1)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire obtenue comme somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme,
- $x \mapsto P(T_3 \leq x \mid N = 2)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire obtenue comme somme de trois variables mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme,

Calculons rapidement ces fonctions de répartition, c'est classique et nous en avons maintenant l'habitude.

Soit X, Y et Z trois variables mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Alors

- $\forall x \in [0, 1], F_X(x) = x$, et si $x \leq 0$ $F_X(x) = 0$, et si $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$.
- Puisque X et Y sont indépendantes, une densité de $X + Y$ est obtenue à l'aide du produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt = \int_0^1 f_Y(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_Y(u) du$$

Ainsi :

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 \, du = x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \int_{x-1}^1 1 \, du = 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient de même une densité de $X + Y + Z$ en effectuant le produit de convolution de f_{X+Y} par f_Z :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(x-t)f_Z(t) \, dt = \int_0^1 f_{X+Y}(x-t) \, dt = \int_{x-1}^x f_{X+Y}(u) \, du.$$

Ainsi :

* si $0 \leq x < 1$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_0^x u \, du = \frac{x^2}{2};$$

* si $1 \leq x < 2$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{x-1}^1 u \, du + \int_1^x (2-u) \, du = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} = 1 - x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + 3x - x^2,$$

* si $2 \leq x < 3$,

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{x-1}^2 (2-u) \, du = \frac{(3-x)^2}{2}.$$

On obtient donc les fonctions de répartition par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

et de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^3}{6} & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

On obtient donc la fonction de répartition suivante de T_3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1-p)^2x + 2p(1-p)\frac{x^2}{2} + p^2\frac{x^3}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (1-4p+\frac{7}{2}p^2) + x(4p-\frac{11}{2}p^2) + x^2(-p+\frac{5}{2}p^2) - \frac{p^2}{3}x^3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{p^2}{6}(3-x)^3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

iii. En dérivant, nous obtenons une densité de T_3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > 3 \\ (1-p)^2 + 2p(1-p)x + p^2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (4p - \frac{11}{2}p^2) + (-2p + 5p^2)x - p^2x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{p^2}{2}(3-x)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

L'espérance de T_3 est alors :

$$\begin{aligned} E(T_3) &= \int_0^1 ((1-p)^2 x + 2p(1-p)x^2 + p^2 x^3) dx + \\ &\quad + \int_1^2 \left(\left(4p - \frac{11}{2}p^2\right)x + (-2p + 5p^2)x^2 - p^2 x^3 \right) dx + \int_2^3 \frac{p^2}{2}(3-x)^2 x dx \\ &= \frac{(1-p)^2}{2} + \frac{2}{3}p(1-p) + \frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}\left(4p - \frac{11}{2}p^2\right) + \frac{7}{3}(-2p + 5p^2) - \frac{15}{4}p^2 + \dots \end{aligned}$$

(Capitulation par K.O., c'est quoi ce sujet de ouf ? !)

Partie III – Cas d'un nombre plus grand de guichets

1. On a $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, si $x \leq 0$, $P(U_n \leq x) = 0$, et

$$\forall x \geq 0, \quad P(U_n \leq x) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \geq x]\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x)$$

puisque les X_i sont mutuellement indépendants. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x} = 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $U_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

On obtient donc directement $E(U_n) = \frac{1}{n\lambda}$ et $V(U_n) = \frac{1}{n^2\lambda^2}$.

2. On a $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, pour tout $x \leq 0$, $P(V_n \leq 0) = 0$, et

$$\forall x \geq 0, \quad P(V_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^n,$$

les X_i étant mutuellement indépendants. Une densité est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f(x) = n\lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} e^{-k\lambda x} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n \binom{n-1}{k} e^{-(k+1)\lambda x}.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx$ est l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}((k+1)\lambda)$, donc l'intégrale est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx = \frac{1}{(k+1)\lambda}.$$

Ainsi, en tant que somme finie d'intégrales convergentes, l'intégrale définissant $E(V_n)$ est convergente. Donc $E(V_n)$ existe, et

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n}{(k+1)\lambda} \binom{n-1}{k} \int_0^{+\infty} (k+1)\lambda x e^{-(k+1)\lambda x} dx \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n}{((k+1)\lambda)^2} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

3. Soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'épreuve de Bernoulli dont le succès est : « la personne A_i a terminé avant l'instant t ».

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le paramètre p_i de cette épreuve est :

$$p_i = P(X_i \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, ces épreuves de Bernoulli ont toutes même paramètre $1 - e^{-\lambda t}$, et sont mutuellement indépendantes.

La variable W_t compte le nombre de succès lors de ces n épreuves. Ainsi, $W_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda t})$.

Son espérance est donc :

$$E(W_t) = n(1 - e^{-\lambda t}).$$