

Devoir surveillé n° 6 – sujet « Ecricome »

Exercice 1 –

1. Tout d'abord, justifions l'existence des dérivées partielles secondes de f . Comme on est en début de copie, on le fait soigneusement...
 - La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en tant que fonction polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de composition, la fonction composée $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
 - De même, la fonction θ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x, y) \mapsto \theta(xy)$, égale à la composée de la fonction $(x, y) \mapsto xy$ et de la fonction θ , est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
 - De même pour $(x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, la fonction $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)$ en tant que quotient de deux fonctions polynomiales sur ce domaine, le dénominateur ne s'annulant pas.
 - Ainsi, la fonction f s'écrit comme produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, elle est donc elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.

On peut donc calculer les dérivées partielles secondes de f : pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\sqrt{xy} \cdot y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\theta'(xy) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\theta'(xy).$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3y^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{5}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{y}{x^2} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\theta''(xy),$
donc : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{2}}} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\theta''(xy)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x\theta'(xy)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + x^2\theta''(xy),$
donc : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + x^2\theta''(xy)$

Un calcul sans difficulté amène alors, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

2. Vous êtes complètement impardonnables de ne pas m'avoir signalé l'erreur. L'expression $\frac{\partial g}{\partial x}v(u, v)$ n'a pas de sens, quelle est donc la signification de ce terme balladeur v ? La spécification du point (u, v) soit bien sûr être accolé à la dérivée partielle. De plus, le fait d'avoir une dérivée par rapport à x alors que dans la suite de l'expression, on a des dérivées par rapport à u et v devait vous mettre la puce à l'oreille. En fait le x est de trop et le v devait prendre sa place. Du coup, c'est bien par rapport à la deuxième variable, et non la première, qu'il fallait dériver. Désolé pour cette erreur qui a échappé à ma relecture pourtant attentive. Mais tout de même, je suis très surpris que personne me l'ait signalée...

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et les fonctions $(u, v) \mapsto \frac{u}{v}$ et $(u, v) \mapsto \sqrt{uv}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, en tant que quotient de fonctions polynomiales, ou en tant que composée d'une fonction polynomiale et de la fonction racine, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, g est obtenue comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$.

De plus, les règles de dérivation de fonctions composées amènent, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

- $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \left\langle \nabla f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right), \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right).$

• puis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{1}{4v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{1}{4v} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{1}{4v} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) \\ &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{1}{4\sqrt{uv}} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{1}{4v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right),\end{aligned}$$

d'après le théorème de Schwarz, f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Ainsi, pour tout (u, v) dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) &= -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) + \frac{u}{2v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{u}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) \\ &= \frac{u}{2v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{u}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right).\end{aligned}$$

Or, f vérifie l'équation (1), donc en posant $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ et $y = \sqrt{uv}$, qui sont bien dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il vient :

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) = 0,$$

soit, en divisant par $2v > 0$,

$$\frac{u}{2v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) - \frac{u}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) = 0.$$

Ainsi, en comparant à l'expression obtenue pour $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v)$, on peut conclure :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$

3. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) + \frac{a}{t} h(t) = 0 \quad (3)$$

(a) Soit $h_0 : t \mapsto \frac{1}{t^a} = e^{-a \ln t}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors h_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que composée de fonctions exponentielles et logarithmiques, de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

• si $a \neq 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'_0(t) = -at^{-a-1} = -\frac{a}{t} \cdot \frac{1}{t^a} = -\frac{a}{t} h_0(t),$$

• si $a = 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'_0(t) = 0 = -\frac{a}{t} h_0(t).$$

Dans tous les cas, h_0 est solution de l'équation différentielle (3).

(b) Soit h une solution de (3), et k définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $k : t \mapsto t^a h(t)$. Alors, k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et, si $a \neq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(t) = at^{a-1} h(t) + t^a h'(t) = t^a \left(\frac{a}{t} h(t) + h'(t) \right) = 0,$$

d'après l'équation satisfaite par h . Si $a = 0$, on obtient directement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(t) = h'(t) = 0.$$

Ainsi, dans tous les cas, k' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc k est une fonction constante (attention, cette propriété est vraie car on est sur un intervalle).

(c) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation (3). Ainsi :

- d'après 3(a), $h_0 \in \mathcal{S}$, et par linéarité de la dérivation, il en découle immédiatement que $\text{Vect}(h_0) \subset \mathcal{S}$;
- d'après 3(b), si $h \in \mathcal{S}$, $t \mapsto t^a h(t)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$, disons de valeur $C \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^a h(t) = C \quad \text{donc:} \quad h(t) = \frac{C}{t^a} = C h_0(t).$$

Ainsi, $h \in \text{Vect}(h_0)$, d'où l'inclusion $\mathcal{S} \subset \text{Vect}(h_0)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $\mathcal{S} = \text{Vect}(h_0)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $t \mapsto \frac{C}{t^a}$, $C \in \mathbb{R}$, définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation (1). Considérons la fonction g définie à partir de f comme dans la question 2. D'après la question 2, on a, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2u} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v).$$

Alors, à v fixé, la fonction $\frac{\partial g}{\partial v}$ vérifie (pour la dérivation par rapport à u) la relation (3), avec $a = -\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe une constante C (constante par rapport à la variable u , mais pouvant dépendre de v), c'est à dire une fonction $C : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépendant que de v , telle que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{C(v)}{u^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{u} \cdot C(v). \quad (4)$$

La fonction de 2 variables $\frac{\partial g}{\partial v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car g est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, pour toute valeur de $u \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction d'une variable $v \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en la variable v sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour $u = 1$, on obtient le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction C . Ainsi, C admet une primitive φ sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle (sa dérivée C étant de classe $\mathcal{C}^1$). Ainsi, en primitivant l'égalité (4) par rapport à v , à u fixé, on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence d'un réel $\theta(u)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(u, v) = \sqrt{u} \cdot \varphi(v) + \theta(u).$$

La fonction θ s'écrit comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$, considérée comme fonction de 2 variables, donc aussi en tant que fonction d'une variable. On a donc trouvé deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, φ et θ , telles que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(u, v) = \sqrt{u} \cdot \varphi(v) + \theta(u).$$

Soit maintenant $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons qu'il existe des réels strictement positifs (u, v) tels que

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{uv}.$$

En multipliant ces deux équations, ou en les divisant, on trouve directement les seules valeurs possibles de u et v :

$$u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x}.$$

Réciproquement, ces valeurs de u et v conviennent, et sont bien dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, d'après la relation liant f et g , on a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$f(x, y) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$

Définissons :

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy), \quad (\varphi, \theta) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)\} \subset \mathcal{C}^2((\mathbb{R}_+^*)^2),$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions solutions de (1).

Nous venons de prouver que toute fonction de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

La première question justifie au contraire que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Ainsi, on a l'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Exercice 2 – (EDHEC 1998)

1. L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu pour la première fois la succession PF aux rangs 1 et 2. Comme il n'y a pas eu de tirage avant, si on obtient PF aux rangs 1 et 2, c'est nécessairement la première fois que l'on obtient cette succession. Ainsi :

$$[X = 2] = P_1 F_2 = P_1 \cap F_2.$$

Les lancers étant indépendants (donc les événements P_1 et F_2 étant indépendants), on obtient :

$$P(X = 2) = P(P_1)P(F_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

la pièce étant équilibrée.

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Supposons que le premier lancer est « Pile ». Alors :
 - si l'événement $P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise alors évidemment $[X = k]$ se réalise.
 - Réciproquement, si $[X = k]$ se réalise, on a nécessairement tiré au moins une fois « Face » lors des k premiers tirages (car le k -ième tirage est un « Face », par description de l'événement $[X = k]$. Alors soit ℓ le rang du premier « Face » obtenu lors des k tirages. On a $\ell \leq k$, et $\ell \geq 2$ (car le premier tirage est un Pile. Supposons que $\ell < k$. Alors, puisque $\ell \leq 2$, il y a eu un tirage au rang $\ell - 1$, qui a nécessairement amené « Pile », puisque le premier « Face » est obtenu au rang ℓ . Ainsi, on a obtenu une succession PF aux rangs $\ell - 1$ et ℓ . Cela contredit la réalisation de $[X = k]$, qui stipule que cette succession n'a pas été obtenue avant les rangs $k - 1$ et k . Ainsi, $\ell = k$, et les $k - 1$ premiers tirages ont dans ce cas tous amené « Pile ». Ainsi, $P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise.
- (b) D'après la question précédente :

$$P_{P_1}(X = k) = P_{P_1}(P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k) = \frac{P(P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k)}{P(P_1)} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

par indépendance des lancers. Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet (P_1, F_1) , on a :

$$P(X = k) = P_{P_1}(X = k)P(P_1) + P_{F_1}(X = k)P(F_1) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P_{F_1}(X = k).$$

Or, en supposant que l'événement F_1 est réalisé :

- si l'événement $[X = k]$ est réalisé, alors on n'a pas de succession PF dans les k premiers tirages avant les rangs $k - 1$ et k , donc également, en oubliant le premier tirage, on n'a pas de succession PF parmi les tirages 2 à k , commençant avant le $k - 2$ -ième de ces tirages (donc avant le $k - 1$ -ième tirage au total)
- Réciproquement, si parmi les tirages de 2 à k , il n'y a pas de succession PF avant le $k - 2$ -ième et le $k - 1$ -ième de ces tirages (donc avant le $k - 1$ -ième et le k -ième tirage au total), et qu'on obtient une telle succession lors de ces deux derniers tirages, alors pour tout i tel que $3 \leq i < k$, $P_{i-1} F_i$ n'est pas réalisé. De plus, comme P_1 n'est pas réalisé, $P_1 F_2$ n'est pas réalisé non plus. Ainsi, pour tout i tel que $2 \leq i < k$, $P_{i-1} F_i$ n'est pas réalisé. Mais en revanche $P_{k-1} F_k$ est réalisé, donc $[X = k]$ est réalisé.

Ainsi, si F_1 est réalisé, $[X = k]$ est réalisé si et seulement si lors des $k - 1$ derniers tirages la première apparition de PF se fait tout à la fin de ces tirages, donc aux rangs $k - 2$ et $k - 1$, après oubli du premier tirage. Ainsi, les $k - 1$ derniers tirages étant indépendants du premier (ce qui nous dispense de la condition), on obtient :

$$P_{F_1}(X = k) = P(X = k - 1).$$

Ainsi, on obtient bien la relation voulue :

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}P(X = k - 1).$$

(c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.

La relation précédente donne, pour tout $k \geq 3$:

$$2^k P(X = k) = 1 + 2^{k-1} P(X = k-1) \quad \text{soit:} \quad u_k = 1 + u_{k-1}.$$

Ainsi, $(u_k)_{k \geq 2}$ est une suite arithmétique de raison 1 :

$$\forall k \geq 2, \quad u_k = u_2 + (k-2).$$

De plus, $u_2 = 4P(X = 2) = 1$. Ainsi :

$$\forall k \geq 2, \quad u_k = k - 1.$$

On obtient donc, pour la loi de X : $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket \cup \{0\}$, puisqu'on ne peut pas obtenir une succession PF avec un seul lancer. Alors :

- $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k};$
- $P(X = 0) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 0,$

d'après la formule du binôme négatif (dérivées des séries géométriques)

3. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k)$ est absolument convergente (ce qui équivaut ici à la convergence, les termes étant tous positifs). Or, pour tout $k \geq 2$,

$$kP(X = k) = \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k(k-1)}{2^{k-2}},$$

et on reconnaît, à un facteur multiplicatif $\frac{1}{4}$ près, une série du binôme négatif, correspondant à la dérivée seconde d'une série géométrique. La raison étant $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a la convergence (et même la convergence absolue) de cette série. D'où l'existence de $E(X)$, et :

$$E(X) = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} = 4.$$

4. (a) • Chacun des événements (F_1, P_1P_2, P_1F_1) est non impossible (et même non quasi-impossible, puisque leurs probabilités sont respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$).
- Si ni P_1P_2 ni P_1F_1 n'est réalisé, alors $P_1P_2 \cup P_1F_1$ n'est pas réalisé, et (P_2, F_2) étant un système complet d'événements, cet événement est égal à P_1 . Donc P_1 n'est pas réalisé, donc F_1 est réalisé. Ainsi, il n'est pas possible que les trois événements soient non réalisés en même temps. Ainsi, $F_1 \cup P_1P_2 \cup P_1F_1 = \Omega$.
- De plus, F_1 et P_1P_2 sont incompatibles, puisqu'on ne peut pas à la fois tirer « Pile » et « Face » au premier tirage. De même, F_1 et P_1F_1 sont incompatibles. Et enfin P_1P_2 et P_1F_1 sont incompatibles, puisqu'on ne peut pas tirer en même temps « Pile » et « Face » au deuxième tirage. Les trois événements sont donc bien deux à deux incompatibles.

Ainsi (F_1, P_1P_2, P_1F_1) est un système complet d'événements.

- (b) Comme on l'a justifié plus haut, ce système complet est constitué d'événements tous non quasi-impossibles. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales, pour le calcul de $P(Y = k)$:

$$\begin{aligned} \forall k \geq 4, \quad P(Y = k) &= P_{F_1}(Y = k)P(F_1) + P_{P_1P_2}(Y = k)P(P_1P_2) + P_{P_1F_1}(Y = k)P(P_1F_1) \\ &= \frac{1}{2}P_{F_1}(Y = k) + \frac{1}{4}P_{P_1P_2}(Y = k) + \frac{1}{4}P_{P_1F_1}(Y = k). \end{aligned}$$

Or :

- Si P_1P_2 est réalisé, $[Y = k]$ ne peut pas être réalisé (puisque $k \geq 4$), car on a obtenu une succession PP aux rangs 1 et 2, donc avant les rangs $k-1$ et k . Ainsi, $P_{P_1P_2}(Y = k) = 0$.
- Si P_1F_1 est réalisé, on n'a pas obtenu de succession PP aux tirages 1 et 2, on ne peut pas en obtenir aux tirages 2 et 3. Ainsi, la première succession PP apparaît aux rangs $k-1$ et k si et seulement s'il n'y a pas de succession PP lors des tirages 3 à k , sauf aux deux derniers rangs. Cette

succession de tirage étant indépendants des deux premiers tirages, cet événement est similaire à celui qui définit $[Y = k - 2]$, après oubli des deux premiers tirages. De plus, les tirages 3 à k étant indépendantes de P_1 et F_2 , on perd la condition, d'où :

$$P_{P_1 F_2}(Y = k) = P(Y = k - 2).$$

- Si F_1 est réalisé, de même, on ne peut pas avoir de succession PP aux tirages 1 et 2, et la condition porte alors uniquement sur l'existence d'une succession PP lors des $k - 1$ tirages suivant le premier, d'où, par le même raisonnement que précédemment :

$$P_{F_1}(Y = k) = P(Y = k - 1).$$

Par conséquent, on obtient bien, pour tout $k \geq 4$:

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k - 1) + \frac{1}{4}P(Y = k - 2). \quad (*)$$

(c) On a :

- $[Y = 2]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu « Pile » aux deux premiers tirages, donc $[Y = 2] = P_1 P_2$, donc :

$$v_2 = P(Y = 2) = P(P_1 P_2) = \frac{1}{4}.$$

- $[Y = 3]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu « Pile » aux tirages 2 et 3, et que c'est la première occurrence de cette succession, ce qui impose qu'on ait tiré « Face » au premier tirage (sinon on a une succession PP lors des deux premiers tirages). Ainsi $[Y = 3] = F_1 P_2 P_3$, donc :

$$v_3 = P(Y = 3) = P(F_1 P_2 P_3) = \frac{1}{8}.$$

La relation $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$ est réalisée pour tout $k \geq 4$ d'après la question précédente. De plus, en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on obtient :

- $\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_1 = \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{8} = v_3$,
donc la relation est aussi vérifiée pour $k = 3$
- $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_0 = \frac{1}{4}v_0 = \frac{1}{4} = v_2$,
donc la relation est aussi vérifiée pour $k = 2$.

- (d) i. Cette fonction calcule le réel v_n si le paramètre n est positif ou nul, et arrête le programme (sans rien renvoyer) si $n < 0$. Cette deuxième action étant évidente (c'est l'instruction **halt**), on va montrer la première action. On le montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « Le paramètre spécifié étant n , l'algorithme s'arrête, et renvoie la valeur de v_n »

- Tout d'abord, si $n = 0$, le premier test $n < 0$ est faux, donc on effectue le deuxième test $n = 0$, qui est vrai. Dans ce cas, on donne la valeur 1 à la fonction, puis le programme s'arrête (pas d'autre appel à une fonction). Donc l'algorithme s'arrête, et fournit la valeur $1 = v_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
- Si $n = 1$, les deux premiers tests $n < 0$ et $n = 0$ sont faux, donc on effectue le troisième test $n = 1$, qui est vrai. Dans ce cas, on définit la valeur de sortie par 0, puis le programme s'arrête (pas d'autre appel à une fonction). Donc l'algorithme s'arrête, et fournit la valeur $0 = v_1$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
- Soit $n \geq 2$, tel que $\mathcal{P}(n - 2)$ et $\mathcal{P}(n - 1)$ soient vraies. Supposons que le paramètre fourni est n . Alors $n \geq 2$, donc les trois tests sont faux, et on se retrouve dans la structure alternative. On exécute donc l'instruction : $v := v(n-1)/2 + v(n-2)/4$;
Cette instruction effectue le calcul de $v(n - 1)$ et $v(n - 2)$, de façon récursive. D'après l'hypothèse de récurrence, le calcul de $v(n - 1)$ s'arrête, et fournit la valeur de v_{n-1} . De même, le calcul de $v(n - 2)$ s'arrête et fournit la valeur de v_{n-2} . Ainsi, cette instruction s'arrête, et définit, pour la valeur de sortie de la fonction,

$$v(n) = \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} = v_n,$$

d'après la relation de récurrence satisfaite par la suite (v_n) . Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vérifié.

Ainsi, les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ entraînent $\mathcal{P}(n)$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ii. Cet algorithme est mauvais, car il fait deux appels récursifs : il y aura redondance des calculs. Par exemple, pour le calcul de v_{n-2} , on va être ramené au calcul de v_{n-3} et v_{n-4} , alors que pour le calcul de v_{n-1} , on va être ramené au calcul de v_{n-2} et v_{n-3} , et ceci de façon indépendante. Donc on calculera deux fois (indépendamment) v_{n-2} , et pour cela on calculera deux fois (indépendamment) v_{n-3} , plus une troisième fois pour le calcul de v_{n-1} . Cette redondance des calculs ralentit considérablement l'algorithme, et fait même « exploser » la complexité, qui est exponentielle ici (comme on le verra un peu plus loin).

Un autre algorithme possible (technique classique de calcul de suites récurrentes :

```
function v(n:integer):real;

var a,b,c:real;
    k:integer;

begin
  a:=1;
  b:=0;
  if n<0 then halt
  else
    if n=0 then v:=1
    else
      begin
        for k:=2 to n do
          begin
            c:=b/2+a/4;
            a:=b;
            b:=c;
          end;
        v:=b;
      end;
    end;
```

Vous constaterez qu'on renvoie la bonne valeur pour $n = 1$, puisque dans ce cas, on ne fait aucun passage dans la boucle et que la valeur de b fournie est celle de l'initialisation, égale à v_1 .

Cet algorithme est linéaire (on passe $n-2$ fois dans une boucle, en effectuant un nombre constant d'opérations à chaque passage), donc meilleur que le précédent.

- iii. Si $n < 0$, on a bien entendu $C_n = 0$. On a également $C_0 = C_1 = 0$.

Soit $n \geq 2$. Alors, pour calculer $v(n)$, on commence par le calcul de $v(n-2)$ et $v(n-1)$, ce qui nécessite respectivement C_{n-2} et C_{n-1} opérations, et on effectue deux divisions et une addition supplémentaires. Ainsi :

$$C_n = C_{n-2} + C_{n-1} + 3.$$

Soit d un réel. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = C_n - d \quad \text{soit:} \quad C_n = a_n + d.$$

Ainsi, la relation de récurrence trouvée pour C_n fournit :

$$\forall n \geq 2, \quad a_n + d = a_{n-2} + d + a_{n-1} + d + 3 \quad \text{soit:} \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + d + 3.$$

Posons donc $d = -3$. On obtient :

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Il s'agit d'une relation récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est $P = X^2 - X - 1$, de racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc λ et μ deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve :

$$3 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad 3 = \lambda \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) + \frac{\sqrt{5}}{2}(\mu - \lambda).$$

En injectant la première équation dans la deuxième, on trouve :

$$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\mu - \lambda) \quad \text{soit:} \quad \mu - \lambda = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

En additionnant ou soustrayant cette quantité à la première équation, il vient donc :

$$\mu = \frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - 3.$$

- (e) Même principe pour expliciter (v_k) évidemment. Le polynôme caractéristique de la récurrence est ici $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$, dont les racines sont $\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Ainsi, il existe λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n + \mu \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

Les conditions initiales $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$ amènent :

$$\lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}(\lambda + \mu) + \frac{\sqrt{5}}{4}(\mu - \lambda) = 0.$$

On obtient, par la même méthode que précédemment :

$$\lambda - \mu = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{puis:} \quad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, et :

- Pour tout $n \geq 2$, $P(Y = n) = v_n$
- Puisque $v_1 = 0$ et $v_0 = 1$:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = 2 - \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \\ &= 2 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{3 + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \\ &= 2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} \\ &= 2 - \frac{1}{10}(15 - 5 - 2\sqrt{5} + 15 - 5 + 2\sqrt{5}) = 0. \end{aligned}$$

- (f) De nouveau, l'existence de l'espérance découle de la convergence absolue des séries du binôme négatif, et, puisque $v_1 = 0$ et $0 \cdot v_0 = 0 = 0 \cdot P(X = 0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n v_n \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{16}{(3+\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{16}{(3-\sqrt{5})^2} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{16}{14+6\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{16}{14-6\sqrt{5}} \\
 &= -\frac{4}{7\sqrt{5}+15} + \frac{4}{7\sqrt{5}-15} \\
 &= -\frac{4(7\sqrt{5}-15)}{245-225} + \frac{4(7\sqrt{5}+15)}{245-225} = 6.
 \end{aligned}$$

Problème – (D'après Exercice 1 - Ecricome 2009)

Partie I – Étude d'un cas particulier

1. On a :

- $\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

soit : $\Phi_A(V_1) = -V_2 + V_3$

- $\Phi_A(V_2) = AV_2 - V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

soit : $\Phi_A(V_2) = -V_1 + V_4$

- $\Phi_A(V_3) = AV_3 - V_3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

soit : $\Phi_A(V_3) = V_1 - V_4$

- $\Phi_A(V_4) = AV_4 - V_4A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$

soit : $\Phi_A(V_4) = V_2 - V_3$

Ainsi, la matrice T de Φ_A étant constituée des colonnes coordonnées des $\Phi_A(V_i)$ dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) , on obtient bien

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. On effectue le calcul :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis:} \quad T^3 = T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$$

Ainsi, le polynôme $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de T . Ses racines sont 0, 2 et -2. Ainsi, ce sont les seules valeurs propres possibles de T :

$$\text{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}.$$

Évidemment, pour le moment, on ne peut conclure qu'à une inclusion.

3. La matrice T est de rang au moins 2 (car ses deux premières colonnes sont non colinéaires), et de rang au plus 2 (car la troisième colonne est l'opposé de la deuxième, et la quatrième est l'opposé de la première). Donc $\text{rg}(T) = 2$. Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f canoniquement associé,

$$\dim E_0 = \dim \text{Ker } f = 4 - \text{rg } f = 2.$$

Or, les colonnes C_1, C_2, C_3 , et C_4 de T vérifient

$$C_1 + C_4 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 + C_3 = 0,$$

ce qui se réécrit :

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans E_0 , et y forment une famille libre (car ils sont non colinéaires. Comme

E_0 est de dimension 2, il en résulte que ces deux vecteurs forment une base de E_0 . On répond donc à la question : une base de E_0 est :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

4. On a, avec la même notation que ci-dessus pour les colonnes de T :

$$TX_1 = T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1.$$

De même :

$$TX_2 = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 + C_2 - C_3 - C_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

5. Les vecteurs X_1 et X_2 étant non nuls, les deux relations précédentes signifient que X_1 et X_2 sont vecteurs propres associés respectivement à 2 et -2 . On peut donc maintenant conclure que 0, 2 et -2 sont valeurs propres, et que $\text{Vect}(X_1) \subset E_2$ et $\text{Vect}(X_2) \subset E_{-2}$. Comme E_0 est de dimension 2, et que la somme des dimensions d'espaces propres vaut 4, et que chaque espace propre E_2 et E_{-2} est au moins de dimension 1, ils ne peuvent pas être de dimension supérieure à 1. Ainsi, $\dim E_2 = \dim E_{-2} = 1$, et

$$E_2 = \text{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_{-2} = \text{Vect}(X_2).$$

Ainsi, puisque $\mathbb{R}^4 = E_0 \oplus E_{-2} \oplus E_2$, on obtient une base formée de vecteurs propres en juxtaposant des bases de chaque espace propre. Ainsi :

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de T . Notons b_1, b_2, b_3 et b_4 respectivement ces vecteurs. Alors, f désignant l'endomorphisme canoniquement associé à T , on a $f(b_1) = 0$, $f(b_2) = 0$, $f(b_3) = 2b_3$ et $f(b_4) = -2b_4$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, on a donc :

$$T = \text{Mat}_{\text{b.c.}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P^{-1} = P D P^{-1}.$$

Le recours à l'endomorphisme canoniquement associé, et à la formule de changement de base, souvent omis par flemme, était attendu du concepteur de l'épreuve. Dans le rapport, il déplore le fait que peu (ou pas) de candidat passent par là pour justifier la relation $T = P D P^{-1}$. À bon entendeur...

6. Pas dur, la matrice T étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Pour trouver une telle base, les espaces propres étant orthogonaux, il suffit de juxtaposer des bases orthonormales de chaque espace propre. Ici, la base qu'on a déterminée dans la question précédente est déjà orthogonale (coup de chance), le seul défaut d'orthogonalité qu'il aurait pu y avoir étant entre b_1 et b_2 (les vecteurs de E_0), les autres sous-espaces vectoriels étant de dimension 1. Il suffit donc de diviser chaque vecteur par sa norme. On obtient une base orthonormale :

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

d'où la nouvelle matrice de passage, orthogonale cette fois :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

la matrice D étant toujours la même.

7. (a) Explicitons le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. On a :

$${}^tAB = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_3 & a_1b_2 + a_3b_4 \\ a_2b_1 + a_4b_3 & a_2b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^4 a_i b_i.$$

L'expression de la matrice de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) montre que $(V_1 - V_4, V_2 - V_3)$ (les vecteurs représentés par les colonnes de T) est une base de $\text{Im } \Phi_A$, c'est-à-dire : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

La formule ci-dessus pour le produit scalaire montre que cette base est orthogonale. De plus, V_1 et V_4 étant orthogonaux, on a, d'après la relation de Pythagore :

$$\|V_1 - V_4\|^2 = \|V_1\|^2 + \|V_4\|^2 = 2, \quad \text{donc:} \quad \|V_1 - V_4\| = \sqrt{2},$$

et de même :

$$\|V_2 - V_3\| = \sqrt{2}.$$

On obtient donc une base orthonormale de $\text{Im } \Phi_A$:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Notons f_1 et f_2 ces deux vecteurs

- (b) Puisqu'on connaît une base orthonormale de l'espace $\text{Im}(\Phi_A)$ sur lequel on projette, on peut écrire, pour tout $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xV_1 + yV_2 + zV_3 + tV_4$:

$$\begin{aligned} p_{\text{Im}(\Phi_A)}(X) &= \langle X, f_1 \rangle f_1 + \langle X, f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{2}(x-t)(V_1 - V_4) + \frac{1}{2}(y-z)(V_2 - V_3) \\ &= \frac{1}{2}((x-t)V_1 + (y-z)V_2 + (z-y)V_3 + (t-x)V_4). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{V}}(p_{\text{Im}(\Phi_A)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Soit $N = p_{\text{Im}(\Phi_A)}(M)$. Alors pour tout $X \in \text{Im}(\Phi_A)$ différent de N , $X - N \perp M - N$, donc :

$$\|X - M\|^2 = \|X - N + N - M\|^2 = \|X - N\|^2 + \|N - M\|^2 > \|N - M\|^2,$$

d'après l'égalité de Pythagore. Ainsi, N tel que $\|M - N\|$ soit minimal existe (N est donné par le projeté de M), et est unique.

On a :

$$N = p_{\text{Im}(\Phi_A)}(M) = \frac{1}{2}(1-4)(V_1 - V_4) + \frac{1}{2}(2-3)(V_2 - V_3) = -\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 + \frac{3}{4}V_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$M - N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$d(M, \text{Im}(\Phi_A)) = d(M, N) = \|M - N\| = \frac{5}{2}\sqrt{1+1+1+1} = 5.$$

- (d) Soit Ψ la restriction de Φ_A à $\text{Vect}(V_1, V_2)$. Alors la matrice de Ψ relativement aux base (V_1, V_2) de son domaine de départ et à la base (V_1, V_2, V_3, V_4) de son domaine d'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, son image est engendrée par les deux vecteurs représentés par ses colonnes, donc par $V_3 - V_2$ et $V_4 - V_1$. Par conséquent, $\text{Im} \Phi_A = \text{Im} \Psi$.

De plus, d'après l'expression du produit scalaire, le produit scalaire entre deux matrices est égal au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ sur les colonnes les représentant dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) . Enfin, la colonne des coordonnées d'un élément de $\text{Im} \Psi$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, on cherche à trouver (x, y) minimisant

$$F(x, y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \|B - AX\|,$$

avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de rang 2. Les valeurs (x, y) minimisant cette expression sont

les solutions du système

$${}^t A A X = {}^t A B.$$

Or, un calcul rapide amène :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient $2x = 1$ et $2y = 3$, soit $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$, puis :

$$N = \psi(x, y) = -\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_4 + \frac{3}{2}V_4.$$

On retrouve bien la même matrice. Les autres calculs en découlent.

Partie II – Réduction de Φ_A dans le cas général

1. Tout d'abord, le produit de deux matrices carrées d'ordre n étant encore une matrice carrée d'ordre n , et la somme de deux matrices carrées d'ordre n aussi, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, Φ_A est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

De plus, soit M, N deux matrices carrées d'ordre n , et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A = AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= (AM - MA) + \lambda(AN - NA) = \Phi_A(M) + \lambda\Phi_A(N). \end{aligned}$$

Ainsi, Φ_A est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. • Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN) \text{Tr}({}^t({}^tMN)) = \text{Tr}({}^tNM) = \langle N, M \rangle,$$

car, la trace n'étant définie qu'avec les coefficients diagonaux, et la transposition laissant invariante ces coefficients diagonaux, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tA)$. Ainsi, $\langle -, - \rangle$ est symétrique.

- Soit $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\langle M + \lambda N, P \rangle = \text{Tr}({}^t(M + \lambda N)P) = \text{Tr}({}^tM + \lambda {}^tN)P = \text{Tr}({}^tMP) + \lambda \text{Tr}({}^tNP) = \langle M, P \rangle + \lambda \langle N, P \rangle,$$

par linéarité de la transposition, puis par linéarité de la trace. Ainsi, $\langle -, - \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable, et la symétrie implique alors la linéarité par rapport à la deuxième variable aussi.

- Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit ${}^tM = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, et ${}^tMM = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. D'après la définition du produit matriciel, on a, pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n m'_{i,j} m_{j,k} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} m_{j,k}.$$

Ainsi,

$$\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i}^2 \geq 0.$$

- De plus, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs, $\langle M, M \rangle = 0$ si et seulement si chacun de ces termes est nul, donc si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,j} = 0$, donc $M = 0$.

Ainsi, il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc d'un produit scalaire.

3. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t(AM - MA)N) = \text{Tr}({}^tMAN - A {}^tMN) = \text{Tr}({}^tMAN) - \text{Tr}(A {}^tMN),$$

puisque A est symétrique, et de même,

$$\langle M, \Phi_A(N) \rangle = \text{Tr}({}^tMAN) - \text{Tr}({}^tMNA).$$

Or, d'après les propriétés de la trace rappelées en début d'énoncé,

$$\text{Tr}({}^tMNA) = \text{Tr}(A {}^tMN),$$

d'où finalement l'égalité :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle.$$

On en déduit que Φ_A est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable.

4. (a) Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq n}$. Alors on a :

$$M_{X,Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \quad \cdots \quad y_n) = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Comme X et Y sont des vecteurs propres, ils sont non nuls. Il existe donc i_0 et j_0 dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$. Alors le coefficient en position (i_0, j_0) de la matrice $M_{X,Y}$, égal à $x_{i_0} y_{j_0}$ est non nul, donc $M_{X,Y}$ est non nul.

Attention à ne pas dire trop vite que le produit de deux matrices non nulles est non nul. C'est faux en général.

De plus, on a

$$AY = \mu Y \quad \text{donc:} \quad {}^t(AY) = \mu {}^tY \quad \text{donc:} \quad {}^tY A = \mu {}^tY,$$

puisque A est symétrique.

- (b) On a :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX {}^tY - X {}^tYA.$$

Or, $AX = \lambda X$, et d'après ce qui précède, ${}^tYA = \mu {}^tY$. Ainsi :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = \lambda X {}^tY - \mu X {}^tY = (\lambda - \mu)M_{X,Y}.$$

Montrons qu'on a alors $\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A)$.

Soit $\nu \in \Gamma$. Par définition, il existe deux éléments λ et μ de $\text{Sp}(A)$ tels que $\nu = \lambda - \mu$. En considérant X et Y deux vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ , le calcul précédent, et le fait que $M_{X,Y} \neq 0$, prouve que $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A , associé à la valeur propre $\nu = \lambda - \mu$. Ainsi, $\nu \in \text{Sp}(\Phi_A)$. D'où l'inclusion.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .

- (a) Supposons que pour tout vecteur propre de A , $MZ = 0$. La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A . D'après l'énoncé, on a donc $Mb_i = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Tout élément de $\mathbb{R}^n$ pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des b_i , on obtient $MX = 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à M est nul, donc M est nul.

Or, cela n'est pas possible, étant donné qu'un vecteur propre n'est pas nul. Ainsi, l'hypothèse initiale est fautive, donc il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.

On note μ la valeur propre associée à Z_0 .

- (b) On a : $\Phi_A(M) = \alpha M = AM - MA$. Ainsi, en multipliant cette égalité à droite par Z_0 , il vient :

$$\alpha MZ_0 = AMZ_0 - MAZ_0 = AMZ_0 - \mu MZ_0, \quad \text{soit:} \quad A(MZ_0) = (\alpha + \mu)(MZ_0).$$

Comme MZ_0 est non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre, la valeur propre associée étant $\lambda = \alpha + \mu$.

- (c) Soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_A)$. La question précédente montre qu'il existe deux valeurs propres λ et μ de A telles que $\alpha = \lambda - \mu$, donc $\alpha \in \Gamma$. On en déduit l'inclusion $\text{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$, et comme on avait déjà prouvé l'inclusion réciproque, il s'agit d'une égalité.

Partie III – Étude du rang de Φ_A

1. Soit $(\lambda_{i,j})$, $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \ell$, une famille de réels tels que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} M_{X_i, Y_j} = 0.$$

On a alors :

$$0 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} X_i {}^tY_j \sum_{i=1}^k X_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} {}^tY_j \right).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} {}^tY_j$ est un vecteur ligne. Notons-le $(\mu_{i,1} \dots \mu_{i,n})$. Ainsi, l'égalité précédente se réécrit :

$$\sum_{i=1}^k X_i(\mu_{i,1} \dots \mu_{i,n}) = 0.$$

Ainsi, la j -ième colonne du membre de droite est $\sum_{i=1}^k X_i \mu_{i,j}$. La nullité de toutes ces colonnes amène :

$$\forall j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \sum_{i=1}^k X_i \mu_{i,j} = 0.$$

Comme la famille $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $\mu_{i,j} = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \mu_{i,1} \\ \vdots \\ \mu_{i,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} Y_j$$

est nul. Ainsi, la famille $(Y_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ étant libre, il en découle que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq \ell}$ est nulle. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $\lambda_{i,j} = 0$. D'où la liberté de la famille M_{X_i, Y_j} .

2. (a) On a :

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \text{Tr}({}^t(X {}^tY)(X' {}^tY)) = \text{Tr}(Y {}^tX X' {}^tY).$$

- Si $X \perp X'$, alors ${}^tX X' = 0$, donc $Y {}^tX X' {}^tY = 0$, donc $\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = 0$.
- Si $Y \perp Y'$, alors ${}^tY Y' = 0$, donc

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \text{Tr}((Y {}^tX X') {}^tY) = \text{Tr}({}^tY(Y {}^tX X')) = 0.$$

Ainsi, si $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$, alors $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$.

(b) Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$. On a alors :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \langle M_{X,Y}, M_{X,Y} \rangle = \text{Tr}({}^t(X {}^tY)X {}^tY) = \text{Tr}(Y {}^tX X {}^tY) = \text{Tr}(Y \|X\|^2 {}^tY) = \text{Tr}(Y {}^tY) = \text{Tr}({}^tY Y).$$

Or, ${}^tY Y$ est un réel, donc une matrice de taille 1×1 . Ainsi :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \text{Tr}({}^tY Y) = {}^tY Y = \|Y\|^2 = 1.$$

Ainsi, on obtient bien $\|M_{X,Y}\| = 1$.

- (c) Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ deux familles orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \neq (i', j')$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket$. Alors, soit $i \neq i'$, soit $j \neq j'$. Ainsi, soit $X_i \perp X_{i'}$, soit $Y_j \perp Y_{j'}$. Par conséquent, d'après la question 2(a), $M_{X_i, Y_j} \perp M_{X_{i'}, Y_{j'}}$. Par conséquent, la famille $(M_{X_i, Y_j})_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket}$ est orthogonale. De plus, d'après la question 2(b), les vecteurs de cette famille sont tous de norme égale à 1. Ainsi, il s'agit d'une famille orthonormale.
3. Soit λ une valeur propre de A , et soit n_λ la dimension du sous-espace propre E_λ de A associé à la valeur propre λ . Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ .
- (a) D'après la partie II, les $X_i {}^tX_j$, $1 \leq i, j \leq n_\lambda$, sont des vecteurs propres de Φ_A , associés à la valeur propre $\lambda - \lambda$. Ainsi, ils sont dans $\text{Ker}(\Phi_A)$. De plus, d'après la question précédente, ils forment une famille orthonormale.
- (b) Par définition de F_λ , $(X_i {}^tX_j)_{1 \leq i, j \leq n_\lambda}$ est une famille génératrice de F_λ . C'est aussi une famille libre, puisqu'elle est orthonormale. Elle est de cardinale n_λ^2 . Ainsi, on obtient : $\dim F_\lambda = n_\lambda^2$.
4. Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ et $(Y_1, \dots, Y_{n_\mu})$ une base orthonormale de E_μ . Alors $(X_i {}^tX_j)_{1 \leq i, j \leq n_\lambda}$ est une base de F_λ et $(Y_k {}^tY_\ell)_{1 \leq k, \ell \leq n_\mu}$. De plus, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n_\lambda \rrbracket^2$, et tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n_\mu \rrbracket^2$, on a $X_i \perp Y_k$ (et aussi $X_j \perp Y_\ell$, mais une seule de ces deux propriétés suffit), car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux ; donc, d'après la question 2(a), $X_i {}^tX_j$ et $Y_k {}^tY_\ell$ sont orthogonaux. Cela étant vrai pour tout (i, j) et tout (k, ℓ) , on en déduit que les espaces qu'engendrent ces deux familles sont orthogonaux, soit : $F_\lambda \perp F_\mu$.

5. (a) Tout ce qui précède montre que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A), \quad \text{donc:} \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, cette somme est directe, car constituée de sous-espaces deux à deux orthogonaux. Ainsi :

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, si X et Y sont deux vecteurs propres de A , l'un associé à λ , l'autre à μ , avec $\lambda \neq \mu$, alors $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A , associé à $\lambda - \mu \neq 0$. Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux, il en résulte que $M_{X,Y} \in \text{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Ainsi, si $B_1, \dots, B_n$ désigne une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A , alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

- soit $M_{X_i, X_j} \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$, si X_i et X_j sont associés à la même valeur propre

- soit $M_{X_i, X_j} \in \text{Ker}(\Phi_A)^\perp$, si X_i et X_j ne sont pas associés à la même valeur propre.

Par conséquent, tout vecteur M_{X_i, X_j} , $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est soit dans $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$, soit dans $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Puisque $(M_{X_i, X_j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc une famille génératrice, on en déduit que

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda + \text{Ker}(\Phi_A)^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, cette somme est directe et orthogonale, car

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A),$$

et que $\text{Ker}(\Phi_A)$ et $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$ sont en somme directe. Ainsi, puisqu'on est en dimension finie,

$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$, donc

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda = \text{Ker}(\Phi_A).$$

(b) D'après le théorème du rang,

$$\text{rg}(\Phi_A) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim \text{Ker}(\Phi_A) = n^2 - \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \right) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(F_\lambda) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} n_\lambda^2.$$

(c) Il faut supposer ici que $n \geq 2$.

- Si A est de rang 1, 0 est valeur propre, puisque A n'est pas de rang n , donc n'est pas inversible. La dimension de E_0 est alors $n - 1$, d'après le théorème du rang.

La matrice A étant diagonalisable, 0 ne peut pas être la seule valeur propre (sinon, la somme des dimensions des espaces propres n'est pas égale à n). Il existe donc au moins un autre espace propre.

Les espaces propres étant au moins de dimension 1, et la somme des dimensions des espaces propres ne pouvant excéder n , il ne peut y avoir qu'un autre espace propre, de dimension 1.

Ainsi, A a deux espaces propres, l'un de dimension $n - 1$, l'autre de dimension 1. On a alors

$$\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - (n - 1)^2 - 1^2 = 2n - 2.$$

C'était le cas de la matrice A de la partie I, avec $n = 2$. On avait bien $\text{rg}(\Phi_A) = 2 = 2 \cdot 2 - 2$.

- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A possède n espaces propres, tous de dimension 1. Ainsi :

$$\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - 1^2 - \dots - 1^2 = n^2 - n = n(n - 1).$$

C'était aussi le cas de la matrice A de la partie I. Une vérification immédiate montre que la formule est aussi correcte dans cet exemple.