**Correction du Concours Blanc n° 2 – (DS 7)**
**Épreuve type EDHEC**

**Exercice 1 – (EDHEC 2002)**

1. Puisque $X_1$ et $X_2$ suivent toutes deux la loi normale centrée réduite, $f_1$ et $f_2$ valent presque partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) \underset{\text{p.p.}}{=} f_2(x) \underset{\text{p.p.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme cette fonction est continue, ainsi que $f_1$ et $f_2$, cette égalité est alors vraie en tout point, et non seulement presque partout. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a alors :

$$g(x^2+y^2) = f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

Par conséquent, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

2. (a) Attention aux hypothèses : ici, on n'est plus dans le cas où $X_1$ et $X_2$ suivent une loi normale centrée réduite. On reprend donc la relation liant $f_1$, $f_2$ et $g$ :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x^2+y^2) = f_1(x)f_2(y).$$

Les deux membres de cette égalité sont dérivables par rapport à $x$, par produit et composition. Ainsi, en dérivant cette relation par rapport à la variable $x$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2xg'(x^2+y^2) = f_1'(x)f_2(y).$$

Comme $f_1$ et $f_2$ sont strictement positives, la première relation est une égalité entre deux termes non nuls, donc on peut diviser cette deuxième relation par la première, et on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{2xg'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)} = \frac{f_1'(x)f_2(y)}{f_1(x)f_2(y)}.$$

Ainsi, en prenant $x \neq 0$, il vient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \frac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$$

(b) Soit $(x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $x_1 \neq x_2$. En prenant $(x,y) = (x_1,x_2)$ dans la relation de la question précédente, on obtient :

$$h(x_1) = \frac{2g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)}.$$

De même, en prenant $(x,y) = (x_2,x_1)$, on obtient cette fois :

$$h(x_2) = \frac{2g'(x_2^2+x_1^2)}{g(x_2^2+x_1^2)} = h(x_1).$$

Ainsi, pour tout $(x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $x_1 \neq x_2$, on a $h(x_1) = h(x_2)$. Par conséquent, $h$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. Soit $a$ la valeur constante de $h$.

(c) La fonction $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, en tant que composition et produit de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad k'(x) = f_1'(x)\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}} - axf_1(x)\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}} = xf_1(x)(h(x)-a)\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}},$$

la dernière égalité étant valable du fait qu'on a supposé $x \neq 0$. Comme $h$ est constante de valeur $a$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad k'(x) = 0.$$

Ainsi, $k$ est constante sur chacun des **intervalles** $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (attention à cette hypothèse souvent oubliée : $f' = 0 \Longrightarrow f$ est constante seulement sous l'hypothèse que le domaine de définition est un intervalle)

Soit $K_1$ la valeur constante de $k$ sur $\mathbb{R}_-^*$, et $K_2$ la valeur constante de $k$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\lim_{x \to 0^-} k(x) = K_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} k(x) = K_2.$$

Or, $k$ est continue sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions continues. Ainsi

$$\lim_{x \to 0^-} k(x) = \lim_{x \to 0^+} k(x) = k(0).$$

Par conséquent, $K_1 = K_2 = k(0)$. On en déduit que $k$ est constante sur $\mathbb{R}$. Soit $K$ la valeur constante de $k$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad K = f_1(x)\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}} \qquad \text{donc:} \qquad f_1(x) = K\mathrm{e}^{\frac{ax^2}{2}}.$$

(d) Puisque $f_1$ est une densité de probabilité, $K$ n'est pas nul (sinon $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1$). De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or :

- si $a > 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0, \qquad \text{donc:} \qquad f_1(x) = o(1).$$

  Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}x$ diverge, d'après le critère de comparaison des intégrales par $o$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, ce qui amène une contradiction.

- Si $a = 0$, $f_1$ est une fonction constante, non nulle, donc on a à nouveau divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, on a nécessairement $a < 0$.

(e) On pose : $\sigma_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{a}}$. On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Comme $f_1$ est une densité, on a

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

De plus, d'après l'expression de la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$, on a :

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

On en déduit que $K = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$, puis que $X_1$ suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$.

(f) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x^2 + y^2) = f_1(x)f_2(x).$$

En prenant $(x,y)=(1,0)$ d'une part et $(x,y)=(0,1)$ d'autre part, il vient alors :

$$f_1(1)f_2(0)=f_1(0)f_2(1),$$

et donc :

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}},$$

puis :

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}}$$

La fonction exponentielle étant injective, on en déduit que

$$\frac{1}{2\sigma_1^2}=\frac{1}{2\sigma_2^2}\qquad\text{puis:}\qquad\sigma_1=\sigma_2,$$

car $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont positifs tous deux.

Ainsi, $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi normale. On note $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$.

3. (a) On a :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f_1(x)f_2(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Ainsi,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}}.$$

(b) On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad f_1(t)f_2(x-t)=g(t^2+(x-t)^2)=g(2t^2-2xt+x^2)=g(2(t-\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{2}).$$

Par conséquent, le produit de convolution de $f_1$ et $f_2$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f_1\star f_2(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(x-t)\ \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(2(t-\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{2}\right)\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{\sigma^2}-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{\sigma^2}}\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{\sigma^2}}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On reconnaît en la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{\sigma^2}}$ une densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{x}{2},\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, donc l'intégrale de cette expression vaut 1 et il vient :

$$f_1\star f_2(x)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}.$$

On reconnaît là l'expression d'une densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,(\sigma\sqrt{2})^2)=\mathcal{N}(0,\sigma^2+\sigma^2)$.

Comme $f_1\star f_2$ est continue sur $\mathbb{R}$, et comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, on en déduit que $f_1\star f_2$ est une densité de $X_1+X_2$, donc $X_1+X_2\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2+\sigma^2)$, ce qui correspond bien à la propriété de stabilité du cours.

**Exercice 2** –

1. **Étude de deux fonctions auxiliaires**

(a) i. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-(1-x)\mathrm{e}^{-x}=(x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi $g'$ s'annule en 2, et $g(2) = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. De plus, d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Enfin, $g(x) = 0$ si et seulement si $1 - x = 0$, donc si et seulement si $x = 1$.
On obtient donc le tableau de variations suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ | $\nearrow$ | $0$ |

ii. La fonction $g$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$, donc injective sur cet intervalle (ici, nul besoin de la continuité et du théorème de la bijection !)

(b) i. Tout d'abord, déterminons $h'$. Pour cela, commençons par observer que $j$ est de classe $\mathcal{C}^2$, comme composées, produits et sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, $h'$ et $h''$ existent, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^x.$$

En dérivant une nouvelle fois, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = (x-2)\mathrm{e}^{1-x} - (1+x)\mathrm{e}^x.$$

Sur l'intervalle $[0,1]$, $x \mapsto x-2$ est strictement négatif, et $x \mapsto 1+x$ est positif. Les exponentielles étant aussi strictement positives, il en résulte que $h''$ est strictement négative sur $[0,1]$, donc $h'$ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

ii. Ainsi, $h'$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, continue, et $h'(0) = \mathrm{e} > 0$, et $h'(1) = -\mathrm{e} < 0$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $h'$ se corestreint en une bijection de $[0,1]$ sur $[-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$. Comme $0 \in [-\mathrm{e}, \mathrm{e}]$, 0 admet un unique antécédent par $h'$, ce qui signifie précisément que $h'$ s'annule en une unique valeur $\alpha$.

On peut remarquer (on peut pour cela partir de la constatation que $x$ et $1-x$ jouent un rôle symétrique, ce qui va induire une symétrie par rapport à la valeur $\frac{1}{2}$) que $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ainsi, $\alpha = \frac{1}{2}$ est la seule valeur annulant $h'$.

iii. Puisque $h'$ est continue sur $[0,1]$, et ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $h'$ garde un signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$, et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Ces signes sont donnés par les valeurs en 0 et en 1 calculées plus haut. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant pour $h$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $1$ |

Par conséquent, $\min_{x\in[0,1]} h(x) = 1$ et $\max_{x\in[0,1]} h(x) = \sqrt{\mathrm{e}}$. De plus, $h$ atteint son minimum aux deux points 0 et 1, alors qu'il atteint son maximum en l'unique valeur $\frac{1}{2}$.

2. **Étude des extrema locaux**

(a) Les fonctions $(x, y, z) \mapsto x + y$, $(x, y, z) \mapsto x + z$ et $(x, y, z) \mapsto y + z$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, en tant que fonctions polynomiales. La fonction exponentielle étant aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, par composition, les fonctions $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{x+y}$, $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{y+z}$ et $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{x+z}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. La fonction $f$ est donc une somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, donc elle est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) La fonction $f$ étant de classe $\mathcal{C}^2$, elle admet un gradient en tout point de $\mathbb{R}^3$ :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} \\ x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} \\ x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $A = (x, y, z)$ un point critique de $f$.

i. On a donc :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & = 0 \\ x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & = 0 \\ x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières lignes, il vient :

$$(1 - x)\mathrm{e}^{y+z} - (1 - y)\mathrm{e}^{x+z} = 0,$$

donc, en multipliant par $\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$,

$$(1 - x)\mathrm{e}^{-x} = (1 - y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{donc:} \qquad g(x) = g(y).$$

On obtient de même $g(y) = g(z)$ en soustrayant les deux dernières lignes.

ii. Supposons que $x > 2$. Alors $g(x) < 0$. Donc $g(y) < 0$ et $g(z) < 0$. Or, d'après la question 1(a)(i), $g$ prend des valeurs positives ou nulles sur $]-\infty, 1]$, donc $y > 1$ et $z > 1$.
Cela n'est pas possible, car alors

$$\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} > 0,$$

donc la première coordonnée du gradient n'est pas nulle, donc $A = (x, y, z)$ ne peut pas être un point critique, contrairement à l'hypothèse faite.

iii. On en déduit que $x \in ]-\infty, 2]$, et un raisonnement similaire permet d'affirmer que $y \in ]-\infty, 2]$ et $z \in ]-\infty, 2]$. On a prouvé ci-dessus que $g$ est injective sur $]-\infty, 2]$, donc l'égalité $g(x) = g(y) = g(z)$ amène $x = y = z$.
En remplaçant dans une des trois équations $y$ et $z$ par $x$, il vient donc :

$$(1 + 2x)\mathrm{e}^{2x} = 0, \qquad \text{puis:} \qquad x = y = z = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, le point $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de $f$.

(d) La fonction $f$ étant de classe $\mathcal{C}^2$, sa hessienne existe, et s'obtient en dérivant par rapport à chacune des trois variables les trois coordonnées du gradient. Ainsi :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \\ \mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + z\mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} \\ \mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{x+z} + \mathrm{e}^{x+y} & x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} \end{pmatrix}.$$

Au point $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, il vient donc :

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} \\ \frac{3}{2\mathrm{e}} & -\frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} \\ \frac{3}{2\mathrm{e}} & \frac{3}{2\mathrm{e}} & -\frac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\nabla^2 f(A)+\frac{5}{2}I_3$ est une matrice de rang 1, donc $-\frac{5}{2}$ est une valeur propre de $A$. L'espace propre associé est de dimension 2. De plus,

$$\nabla^2 f(A)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, 2 est valeur propre de $\nabla^2 f(A)$. La somme des dimensions des espaces propres étant au plus égale à 3, il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre.

(e) Ainsi, la hessienne de $f$ en $A$ admet deux valeurs propres de signe strictement opposé, donc $f$ n'admet pas d'extremum local au point $A$.

Comme $\mathbb{R}^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert, un point en lequel $f$ admet un minimum ou un minimum est nécessairement un point critique de $f$. Or, l'unique point critique de $f$ ne correspond pas à un extremum local, donc non plus à un extremum global. Ainsi, $f$ n'admet ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une restriction**

Soit $\mathcal{C}$ la contrainte $x+y+z=1$.

(a) Soit $\mathcal{H}$ le plan vectoriel associé à la contrainte affine $\mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est le plan d'équation $x+y+z=0$, donc $\mathcal{H}^{\perp}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Par définition, $B=(x,y,z)$ est un point critique de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $B\in\mathcal{C}$ et si $\nabla f(B)\in\mathcal{H}^{\perp}$

Cette deuxième condition donne l'égalité des différentes coordonnées du gradient au point $B$, donc :

$$\mathrm{e}^{y+z}+y\mathrm{e}^{x+z}+z\mathrm{e}^{x+y}=x\mathrm{e}^{y+z}+\mathrm{e}^{x+z}+z\mathrm{e}^{x+y}=x\mathrm{e}^{y+z}+y\mathrm{e}^{x+z}+\mathrm{e}^{x+y}$$

En soustrayant le premier et le second terme, on se retrouve avec la même expression qui dans la question 2(c)(i) nous a permis d'obtenir l'égalité $g(x)=g(y)$. Ainsi, cette égalité est encore vraie ici. De même $g(y)=g(z)$, d'où l'égalité des trois termes $g(x)=g(y)=g(z)$.

(b) De même que dans la question 2, si on suppose que $x>2$, alors $y>1$ et $z>1$, donc $x+y+z>4>1$, ce qui contredit l'appartenance de $B$ à $\mathcal{C}$. De même si $y>2$ ou si $z>2$. Ainsi, on a $x\leqslant 2$, $y\leqslant 2$ et $z\leqslant 2$, et $g(x)=g(y)=g(z)$. Comme $g$ est injective sur $]-\infty,2]$, on en déduit que $x=y=z$.

Enfin, puisque $B\in\mathcal{C}$, c'est-à-dire $x+y+z=1$, on en déduit que :

$$x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Ainsi, $f$ admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$, le point $B=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(c) Justifions d'abord que $D$ est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^3$.

- Tout d'abord, pour tout $(x,y,z)\in\Delta$, puisque $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ et $z\geqslant 0$, l'égalité $x+y+z=1$ amène $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ et $0\leqslant z\leqslant 1$. Ainsi, $D$ est inclus dans le cube (borné) $[0,1]^3$. Ainsi, $D$ est borné
- De plus, $\mathbb{R}_+$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, donc le produit cartésien $(\mathbb{R}_+)^3$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$ Enfin, soit $k:(x,y,z)\mapsto x+y+z$. La fonction $k$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale, et $\{1\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, donc $k^{-1}(\{1\})$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. Or,

$$D=(\mathbb{R}_+)^3\cap k^{-1}(\{1\}),$$

donc $D$ est l'intersection de deux fermés, donc $D$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, $f$ étant continue sur le sous-ensemble fermé borné $D$, $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $D$. Ainsi, $f$ admet un minimum et un maximum sur $D$.

Soit $U=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)\mid x+y+z=1\}$, $F_1=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3\mid x+y+z=1, x=0\}$, $F_2=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3\mid x+y+z=1, y=0\}$ et $F_1=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3\mid x+y+z=1, z=0\}$. Ainsi,

$$D=U\cup F_1\cup F_2\cup F_3.$$

- Soit $\tilde{f}$ la restriction de $f$ à l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^3$. La recherche des extrema de $f$ sur $U$ est donc équivalente à la recherche des extrema de $\tilde{f}$ sous la contrainte $\mathcal{C}$. Comme $\tilde{f}$ est définie sur un ouvert, un extremum est nécessairement atteint en un point critique sous contrainte. Nous avons montré que le seul point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ est $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, qui correspond donc à l'unique point de $U$ candidat à accueillir un minimum ou un maximum de $f$ sur $U$. En ce point, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}.$$

- Soit $(x, y, z) \in F_1$. Alors $x + y + z = 1$ et $x = 0$, donc $z = 1 - y$. Ainsi,

$$F_1 = \{(0, y, 1 - y),\ y \in [0, 1]\}$$

On obtient, pour tout $y \in [0, 1]$ :

$$f(0, y, 1 - y) = y\mathrm{e}^{1-y} + (1 - y)\mathrm{e}^{y} = h(y).$$

Or, $h$ admet sur $[0, 1]$ un minimum égal à 1, atteint aux deux points 0 et 1, et un minimum égal à $\sqrt{\mathrm{e}}$, atteint en $\frac{1}{2}$. Donc $f$ admet sur $F_1$ un minimum égal à 1, atteint aux deux points $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, et un maximum égal à $\sqrt{\mathrm{e}}$, atteint au point $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- De même, $f$ admet sur $F_2$ un minimum égal à 1, atteint aux point $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et un maximum $\sqrt{\mathrm{e}}$ atteint en $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.
- De même, $f$ admet sur $F_3$ un minimum égal à 1, atteint aux points $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$, et un maximum $\sqrt{\mathrm{e}}$ atteint en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Puisque $\mathrm{e} > 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$, donc finalement :
- $f$ admet sur $D$ un minimum, égal à 1, atteint aux trois points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ (les sommets du domaine triangulaire $D$)
- $f$ admet sur $D$ un maximum égal à $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$, atteint en l'unique point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (centre du triangle équilatéral $D$).

**Exercice 3 – (adapté de ESC 2005)**

1. Notons $R_n$ l'événement consistant à tirer une boule rouge au $n$-ième tirage, $V_n$ l'événement consistant à tirer une boule verte au $n$-ième tirage, et $B_n$ l'événement consistant à tirer une boule bleue au $n$-ième tirage.
   - Le système $(R_1, V_1, B_1)$ est un système complet d'événements. De plus :
     * Si $R_1$ est réalisé, il y a, à l'issue du premier tirage, $S - 1$ boules rouges, $S$ boules vertes et $2S + 1$ boules bleues.
     * Si $V_1$ est réalisé, il y a, à l'issue du premier tirage, $S$ boules rouges, $S$ boules vertes, et $2S$ boules bleues.
     * Si $B_1$ est réalisé, il y a, à l'issue du premier tirage $S + 1$ boules rouges, $S$ boules vertes et $2S - 1$ boules bleues.

     Ainsi, $X_1(\Omega) = \{S - 1, S, S + 1\}$, et :
     * $[X_1 = S - 1] = R_1$, donc $P(X_1 = S - 1) = P(R_1) = \frac{1}{4}$
     * $[X_1 = S] = V_1$, donc $P(X_1 = S) = P(V_1) = \frac{1}{4}$
     * $[X_1 = S + 1] = B_1$, donc $P(X_1 = S + 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$.
   - Supposons $S \geqslant 2$. À l'issue du deuxième tirage, il peut rester dans l'urne :
     * $S - 2$ boules rouges : si et seulement si on a tiré deux boules rouges, remplacées par deux boules bleues.
     * $S - 1$ boules rouges : si et seulement si on a tiré dans un ordre quelconque une boule rouge et une boule verte ; en effet, si on tire une boule bleue à un moment, cela rajoute une boule rouge, et il faudrait au moins trois autres tirages pour retirer trois boules rouges
     * $S$ boules rouges : si et seulement si on ne modifie par le nombre de boules rouges, donc on tire deux boules vertes, ou si lors des deux tirages on retire une boule rouge, et on en rajoute une, dans un ordre ou dans l'autre, ce qui revient à tirer, dans un ordre quelconque, une boule rouge et une boule verte

∗ $S+1$ boules rouges, si on a tiré une boule bleue et une boule verte, dans un ordre quelconque
∗ $S+2$ boules rouges, si on a tiré deux boules bleues.
Ainsi, $X_2(\Omega) = \{S-2, S-1, S, S+1, S+2\}$, et on obtient :
∗ $[X_2 = S-2] = R_1 \cap R_2$, donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X_2 = S-2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{S}{4S} \cdot \frac{S-1}{4S} = \frac{S-1}{16S},$$

puisque si $R_1$ est réalisé, il reste dans l'urne, avant le deuxième tirage, $4S$ boules dont seulement $S-1$ boules rouges.
∗ $[X_2 = S-1] = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)$, donc, les deux événements de cette union étant incompatibles :

$$P(X_2 = S-1) = P(R_1)P_{R_1}(V_2) + P(V_1)P_{V_1}(R_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

∗ $[X_2 = S] = (R_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)$, donc, avec les mêmes justifications que précédemment :

$$P(X_2 = S) = P(R_1)P_{R_1}(S_2) + P(S_1)P_{S_1}(R_2) + P(V_1)P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2S+1}{4S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S+1}{4S} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5S+3}{16S}.$$

∗ $[X_2 = S+1] = (B_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap B_2)$. Donc :

$$P(X_2 = S+1) = P(B_1)P_{B_1}(V_2) + P(V_1)P_{V_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

∗ $[X_2 = S+2] = B_1 \cap B_2$, donc :

$$P(X_2 = S+2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S-1}{4S} = \frac{2S-1}{8S}.$$

- Si $S = 1$ (cas non exclu dans l'énoncé), on a initialement dans l'urne 4 boules, dont une boule rouge, une boule verte, et deux boules bleues. Il peut rester dans l'urne à l'issue du deuxième tirage, 0, 1, 2 ou 3 boules rouges, donc $X_2(\Omega) = [\![0, 3]\!]$. Les raisonnements effectués pour les calculs de $P(X_2 = i)$ dans le cas $S \geqslant 2$ sont encore valables dans ce cas, à part le cas $X_2 = S-2 = -1$, qui est impossible ici. Mais l'expression obtenue est encore correcte, puisque dans le cas général, on a obtenu $P(X_2 = S-2) = \frac{S-1}{16S}$, qui est nul lorsque $S = 1$. Ainsi, les expressions obtenues précédemment sont aussi correctes dans le cas où $S = 1$, à ceci près que $S-2 \notin X_2(\Omega)$.

Un calcul rapide et sans difficulté amène :

$$E(X_1) = (S-1)P(X_1 = S-1) + SP(X_1 = S) + (S+1)P(X_1 = S+1) = S + \frac{1}{4}.$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X_2) = (S-2)&P(X_2 = S-2) + (S-1)P(X_2 = S-1) + SP(X_2 = S) \\ &+ (S+1)P(X_2 = S+1) + (S+2)P(X_2 = S+2) \\ = S &+ \frac{1}{2} - \frac{1}{8S}. \end{aligned}$$

2. On suppose que $n \geqslant 2S$, de sorte que $X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}$.
   (a) Soit $k \in [\![0, 3S]\!]$. Le nombre total de boules n'est pas modifié lors de l'expérience : lorsqu'on tire une boule, on n remet toujours une (la même ou une autre). Ainsi, à tout moment, il y a $4S$ boules dans l'urne. Le nombre de boules vertes est inchangé également : il y en aura toujours $S$. Ainsi, s'il y a $k$ boulrs rouges dans l'urne, le nombre de boules bleues sera égal à $4S - k - S = 3S - k$. Ainsi, si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, il reste, à l'issue du $n$-ième tirage, $k$ boules rouges, $S$ boules vertes, et $3S - k$ boules bleues.
   - Supposons que $k \neq 0$, et $k \neq 3S$. Lors du $n+1$-ième tirage, on peut soit retirer une boule rouge (cas où on tire une boule rouge), soit rajouter une boule rouge (cas où on tire une boule bleue), soit laisser le nombre de boules rouges inchangé (cas où on tire une boule verte). Ainsi, conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$, $X_{n+1}$ peut prendre les valeurs $k-1$, $k$ et $k+1$, et :

* $P(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = P(B_{n+1} \mid X_n = k) = \frac{k}{4S}$.
* $P(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = P(V_{n+1} \mid X_n = k) = \frac{1}{4}$.
* $P(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = P(B_{n+1} \mid X_n = k) = \frac{3S-k}{4S}$

- Si $k = 0$, il en est de même, à part qu'on ne peut pas retirer de boule rouge supplémentaire, et seules les valeurs $k$ et $k+1$ sont possibles (les formules précédentes sont donc aussi correctes dans ce cas, puisque pour $k = 0$, on obtenait une probabilité nulle pour $[X_{n+1} = k-1]$ conditionnellement à $[X_n = k]$.
- Si $k = 3S$, de même, la troisième probabilité est nulle, ce qui n'affirme rien de plus que le fait qu'il n'y a plus à ce moment de boule bleue dans l'urne, donc on ne peut pas tirer une boule bleue supplémentaire (et donc rajouter une boule rouge). Ainsi, dans ce cas, $X_{n+1}$ ne peut pas prendre la valeur $k+1$.

(b) Soit $n \geqslant 2S$. D'après la question précédente et la formule des probabilités totales sur le système complet $([X_n = k])_{k \in [\![0,3S]\!]}$, on a :

$$\forall \ell \in [\![0,3S]\!], \quad P(X_{n+1} = \ell) = \sum_{k=0}^{3S} P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = k) \cdot P(X_n = k).$$

Or, puisqu'on ne peut retirer ou rajouter qu'une boule rouge à la fois, l'événement $[X_{n+1} = \ell]$ ne peut pas être réalisé si $X_n$ n'a pas pris une des trois valeurs $\ell - 1$, $\ell$ ou $\ell + 1$. Ainsi, pour tout $\ell \in [\![0,3S]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \ell) = P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell-1) \cdot P(X_n = \ell-1) + P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) \\ + P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell+1) \cdot P(X_n = \ell+1), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{\ell=0}^{3S} \ell P(X_{n+1} = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell-1) \cdot P(X_n = \ell-1) + \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) \\
&\qquad\qquad + \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell+1) \cdot P(X_n = \ell+1) \\
&= \sum_{\ell=1}^{3S} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell-1) \cdot P(X_n = \ell-1) + \sum_{\ell=0}^{3S} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=0}^{3S-1} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell+1) \cdot P(X_n = \ell+1) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S-1} (\ell+1) P(X_{n+1} = \ell+1 \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) + \sum_{\ell=0}^{3S} \ell P(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{3S} (\ell-1) P(X_{n+1} = \ell-1 \mid X_n = \ell) \cdot P(X_n = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S-1} (\ell+1) \frac{3S-\ell}{4S} \cdot P(X_n = \ell) + \sum_{\ell=0}^{3S} \ell \frac{1}{4} \cdot P(X_n = \ell) + \sum_{\ell=1}^{3S} (\ell-1) \frac{\ell}{4S} \cdot P(X_n = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S} (\ell+1) \frac{3S-\ell}{4S} \cdot P(X_n = \ell) + \sum_{\ell=0}^{3S} \ell \frac{1}{4} \cdot P(X_n = \ell) + \sum_{\ell=0}^{3S} (\ell-1) \frac{\ell}{4S} \cdot P(X_n = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S} \left( \ell + \frac{3S - 2\ell}{4S} \right) P(X_n = \ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{3S} \left( 1 - \frac{1}{2S} \right) \ell P(X_n = \ell) + \frac{3}{4} \sum_{\ell=0}^{3S} P(X_n = \ell) \\
&= \left( 1 - \frac{1}{2S} \right) E(X_n) + \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Soit $p_n = E(X_n)$. Ainsi, $(p_n)_{n\geqslant 2S}$ est une suite arithmético-géométrique. Posons, pour une valeur $c$ que nous déterminerons ensuite, pour tout $n \geqslant 2S$, $u_n = p_n - c$. Ainsi,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - c = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) p_n + \frac{3}{4} - c = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)(u_n + c) + \frac{3}{4} - c = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) u_n - \frac{c}{2S} + \frac{3}{4}.$$

Posons donc $c = \frac{3S}{2}$, de sorte que $(u_n)$ est une suite géométrique. On a donc :

$$\forall n \geqslant 2S, \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S} u_{2S},$$

puis

$$\forall n \geqslant 2S, E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S} \left(E(X_{2S}) - \frac{3S}{2}\right) + \frac{3S}{2}.$$

(d) La suite $\left(\left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S}\right)_{n\geqslant 2S}$ étant une suite géométrique de raison comprise dans $[0, 1[$, elle converge vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{3S}{2}.$$

3. Évidemment, la simulation d'un phénomène alétoire utilise la fonction `random`, donc il ne faut pas oublier dans le corps de programme l'initialisation du générateur aléatoire, par l'instruction `randomize`; La fonction simulant la variable $X_n$ s'écrit :

```
function Xn(S,n:integer):integer;
var i,t,r:integer;
begin
  r:=S;                          {r compte les boules rouges, initialement S}
  for i:=1 to n do
    begin
      t:= random(4*S);           {on tire parmi 4S boules}
      if t < r then r:=r-1       {les r premières sont des boules rouges}
        else
          if t >= 3*S-r then r:=r+1; {les 3S-r dernières sont bleues}
    end;
  Xn:=r
end;
```

**Problème – (EM Lyon 2006)**

1. (a) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base canonique sont données par la $i$-ième colonne de la matrice $C$, donc une colonne contituée de 0, sauf un 1 en position $i+1$. Ainsi :

$$f(e_i) = e_{i+1}.$$

(b) Soit, pour tout $j$ dans $[\![1, n-1]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(j)$: $f^j(e_1) = e_{j+1}$
Si $j = 1$, on a $f^1(e_1) = f(e_1) = e_2 = e_{1+1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $j \in [\![1, n-2]\!]$, tel que $\mathcal{P}(j)$ soit vraie. Alors $f^{j+1}(e_1) = f(f^j(e_1)) = f(e_{j+1})$, d'après l'hypothèse de récurrence. Comme $j+1 \in [\![1, n-1]\!]$, on peut appliquer la question $1(a)$ avec $i = j+1$, et on obtient :

$$f^{j+1}(e_1) = e_{j+1+1} = e_{j+2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout $j$ dans $[\![1, n-2]\!]$, $\mathcal{P}(j)$ entraîne $\mathcal{P}(j+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(j)$ est vraie pour tout $j$ dans $[\![1, n-1]\!]$.
Par conséqent, $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_n)$. Les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique étant données par la dernière colonne de la matrice, on obtient donc :

$$f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n).$$

2. (a) L'égalité de la question 1(b) est aussi vraie pour $j = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= f^n(e_1) + a_{n-1}f^{n-1}(e_1) + \cdots + a_1 f(e_1) + a_0 e_1 \\ &= -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}f^{i-1}(e_1) = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i = 0, \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité provenant de la question 1(b).

(b) Soit $i \in \mathbb{N}$. On a :

$$g \circ f^i = \left( f^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j \right) \circ f^i = f^n \circ f^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j \circ f^i = f^{n+i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{i+j}.$$

De même, par linéarité de $f^i$ :

$$f^i \circ g = f^i \circ \left( f^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j \right) = f^i \circ f^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^i \circ f^j = f^{n+i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{i+j}.$$

On a donc bien $g \circ f^i = f^i \circ g$.

(c) Ainsi, puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f^{i-1}(e_1)$, avec $i - 1 \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$g(e_i) = g \circ f^{i-1}(e_1) = f^{i-1} \circ g(e_1) = f^{i-1}(g(e_1)) = f^{i-1}(0) = 0,$$

puisque $f^{i-1}$ est une application linéaire.

(d) Ainsi, l'application linéaire $g$ s'annule en tous les éléments de la base $(e_1, \ldots, e_n)$, donc $g$ est l'endomorphisme nul. Par conséquent, puisque $g = P(f)$, $P$ est un polynôme annulateur de $f$.

**Application 1 :** L'énoncé donne un polynôme annulateur de $A$, donné par $P = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$. Il suffit donc de choisir $A$ égale à la matrice compagnon de $P$, donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) C'est une question de cours. Soit $\lambda$ une valeur propre de $C$, et soit $X$ un vecteur propre associé à $\lambda$. Alors

$$CX = \lambda X,$$

puis, par une récurrence immédiate, $C^i X = \lambda^i X$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Comme $P$ est un polynôme annulateur de $f$, il est aussi un polynôme annulateur de la matrice de $f$ relativement à la base canonique, donc un polynôme annulateur de $C$. Ainsi :

$$C^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i C^i = 0,$$

et en multipliant par $X$ :

$$C^n X + \sum_{i=1}^{n-1} a_i C^i X = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lambda^n X + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^i X = 0.$$

Ainsi :

$$P(\lambda)X = 0,$$

et comme $X$ n'est pas nul, et $P(\lambda)$ est un scalaire, il en résulte que $P(\lambda) = 0$, donc $\lambda$ est racine de $P$.

3. (a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$. On a alors :

$$Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j(e_1),$$

et comme tout indice $j$ dans cette somme est dans $[\![0, n-1]\!]$, d'après 1(b), $f^j(e_1) = e_{j+1}$, donc :

$$Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1}.$$

(b) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, annulateur de $f$. Alors $Q(f) = 0$, donc en particulier $Q(f)(e_1) = 0$, donc

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j-1} e_j = 0.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, il en résulte que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, donc $Q$ est le polynôme nul.

Ainsi, il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$, et annulateur de $f$.

(c) Soit $\lambda$ une racine de $P$.

Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$. On a :

$$(f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = f \circ R(f) - \lambda R(f),$$

par linéarité de $f$. Soit $Q = XR$. On a donc $P = (X - \lambda)R = Q - \lambda R$. Ainsi :

$$f \circ R(f) - \lambda R(f) = Q(f) - \lambda R(f) = (Q - \lambda R)(f) = P(f).$$

Par conséquent, puisque $P$ est un polynôme annulateur de $f$ :

$$(f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = P(f) = \tilde{0}.$$

(d) Soit $\lambda$ une racine de $P$, et $R$ tel que $P = (X - \lambda)R$. Supposons que $\lambda$ ne soit pas une valeur propre de $f$. Alors $f - \lambda \mathrm{id}$ est un isomorphisme (la matrice associée est inversible). Par conséquent,

$$R(f) = (f - \lambda \mathrm{id})^{-1} \circ (f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = (f - \lambda \mathrm{id})^{-1} \circ \tilde{0} = \tilde{0}.$$

On obtiendrait donc que $R$ est un polynôme annulateur de $f$ également. D'après la question 3(b), cela n'est pas possible, puisque $R$ est non nul (car $P$ est non nul), et $R$ est de degré $n-1$.

Donc $\lambda$ est valeur propre de $f$, donc de sa matrice représentative dans la base canonique, à savoir $C$.

Ainsi, l'ensemble des racines de $P$ est inclus dans l'ensemble des valeurs propres de $C$. Comme on avait déjà prouvé l'inclusion réciproque, on en déduit l'égalité entre ces deux ensembles.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$C - xI_n = \begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - x \end{pmatrix}$$

Les $n-1$ premières colonnes sont échelonnées en leur dernière coordonnée non nulle, donc forment une famille libre de cardinal $n-1$ de l'ensemble des colonnes de $C - xI_n$, donc cette matrice est au moins de rang $n-1$.

Une façon peut-être un peu plus rigoureuse de justifier cette liberté est de considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est inversible, car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls. Ainsi, ses colonnes forment une famille libre. En particulier, l'ensemble de ses $n-1$ dernières colonnes est aussi une famille libre de cardinal $n-1$. Or, cette famille est exactement la famille des $n-1$ premières colonnes de la matrice $C - xI_n$.

Retenez cet argument qui permet de rendre un peu plus rigoureux tous les arguments d'échelonnement (en insérant les vecteurs de la base canonique de façon à se retrouver avec une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls).

Soit donc $\lambda$ une valeur propre de $C$. Par définition, $C - \lambda I_n$ est non inversible, donc $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) < n$, donc $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) \leqslant n-1$. D'après ce qui précède, $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) \geqslant n-1$ également, donc finalement, $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) = n-1$.

Or, d'après le théorème du rang, en notant $E_\lambda$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$, on a :

$$\dim E_\lambda = \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}) = n - \mathrm{rg}(C - \lambda I_n) = 1.$$

Donc, touts les sous-espaces propres de $C$ sont de dimension exactement égale à 1.

(b) La matrice $C$ est dimegonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C)} \dim E_\lambda = n \qquad \text{soit:} \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C)} 1 = n,$$

puisque les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Ainsi, $C$ est diagonalisable si et seulement si

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(C)) = n,$$

donc puisque $\mathrm{Sp}(C) = \mathrm{rac}(P)$, si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathrm{rac}(P)) = n$. Ainsi, $C$ est diagonalisable si et seulement si l'ensemble des racines de $P$ est de cardinal $n$, donc si $P$ admet $n$ racines distinctes exactement, ces racines étant nécessairement simples alors, puisque $P$ est de degré $n$.

5. (a) **Application 2 :** La matrice $A_1$ est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^4 - 1$, qui admet 4 racines deux à deux distinctes égales aux racines 4-ièmes de l'unité, à savoir $1$, $-1$, $\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$. Ainsi, d'après la question précédente, $A_1$ est diagonalisable.

(b) **Application 3 :** La matrice $A_2$ est la matrice compagnon du polynôme $P_2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$. On a une racine évidente égale à 1, et :

$$P_2 = (X-1)(X^3 - X^2 - 4X + 4).$$

Or, 1 est racine évidente de $X^3 - X^2 - 4X + 4$ également, donc 1 est racine de'ordre de multiplicité au moins égal à 2 de $P_2$. Ainsi, $P_2$ étant de degré 4 et admettant une racine au moins double, $P_2$ ne peut pas admettre 4 racines deux à deux distinctes, donc, d'après la question 4(b), $A_2$ n'est pas diagonalisable.

6. (a) Soit $t$ un nombre complexe.

- Supposons que $C - tI_n$ est inversible. Soit $M$ son inverse. Alors $M(C - tI_n) = I_n$ et $(C - tI_n)M = I_n$. Transposons ces deux égalités, cela donne respectivement :

$$^t(C - tI_n)\ ^tM = \ ^tI_n \qquad \text{et} \qquad ^tM\ ^t(C - tI_n) = \ ^tI_n.$$

Par linéarité de la transposition, et l'invariance de $I_n$ par transposition, on obtient donc :

$$(B - tI_n)\ ^tM = I_n \qquad \text{et} \qquad ^tM(B - tI_n) = I_n.$$

Ainsi, $B - \lambda I_n$ est inversible, son inverse étant $^tM$, la transposée de l'inverse de $(C - tI_n)$.

- Puisque ${}^tB = C$, le même raisonnement, en inversant les rôles de $B$ et $C$, montre que si $B - tI_n$ est inversible, alors $C - tI_n$ est inversible.

Ainsi, la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.

(b) Commençons par montrer que $\mathrm{Sp}(C) \subset \mathrm{Sp}(B)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$. Ainsi, $C - \lambda I_n$ n'est pas inversible, donc, d'après la question précédente, $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible non plus, donc $\lambda$ est valeur propre de $B$. Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$.

Cela prouve que $\mathrm{Sp}(C) \subset \mathrm{Sp}(B)$.

Le même raisonnement en inversant les rôles de $B$ et $C$ donne $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{Sp}(C)$.

Ainsi, les deux inclusions amènent l'égalité $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(C)$.

(c) Soit $\lambda$ une valeur propre de $B$. On a :

$$B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

Notons $F_\lambda$ l'espace propre de $B$ associé à la valeur propre $\lambda$. Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est dans $F_\lambda$ si et seulement si

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

Cela équivaut à :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0 x_1 - a_1 \lambda x_1 - \cdots - a_{n-1} \lambda^{n-1} x_1 - \lambda^n x_1 = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne de ce système équivaut à

$$-P(\lambda) x_1 = 0,$$

ce qui est toujours vérifié, puisque, d'après 6(b), $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$, donc, d'après 2(e) (ou le cours), $\lambda$ est racine de $P$, polynôme annulateur de $C$. Donc la dernière ligne du système étant triviale, on peut la supprimer, et finalement $X \in F_\lambda$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases}$$

donc si et seulement si $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$F_\lambda = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

La famille contitué de cet unique vecteur est donc une base de $F_\lambda$.

(d) On suppose que le polynôme $P$ admet $n$ racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Alors,

$$\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(C) = \mathrm{rac}(P),$$

donc $B$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, et est une matrice d'ordre $n$. Donc $B$ est diagonalisable.

D'après la question précédente, les $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}\right)$, $i \in [\![1, n]\!]$, sont des bases des différentes sous-espaces propres $F_{\lambda_i}$ de $B$, donc, $B$ étant diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation $\mathcal{B}$ de $B$ en juxtaposant les bases des différents sous-espaces propres :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

Cette famille étant une base, elle est de rang $n$, donc la matrice dont les colonnes sont ces $n$ vecteurs est aussi de rang $n$ (égal à son ordre), donc inversible. Ainsi, la matrice $V$ est inversible.

7. Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $u$ un endomorphisme de $E$ admettant $n$ valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme $u$ est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$ respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.

(a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$u^k(a) = u^k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = u^k(\varepsilon_1) + \cdots + u_k(\varepsilon_n) = \lambda_1^k \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n^k \varepsilon_n.$$

Ainsi, la matrice $M$ de la famille $(u^0(a), u^1(a), \dots, u^{n-1}(a))$ relativement à la base $\mathcal{E}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_2^0 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^0 & \lambda_n^1 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = {}^t V.$$

Ainsi, $V$ étant inversible, $M$ l'est aussi (cas particulier de la question 6(a), appliquée à $t = 0$).
Donc, la matrice $M$ représentative de la famille $(u^0(a), u^1(a), \dots, u^{n-1}(a))$ relativement à la base $\mathcal{E}$ est de rang $n$, donc cette famille est de rang $n$, donc libre (puisque aussi de cardinal $n$). Puisque $E$ est de dimension $n$, il s'agit d'une famille libre maximale, donc d'une base de $E$.

(b) Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = u^{i-1}(a)$. On a alors

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], u(\beta_i) = u(u^{i-1}(a)) = u^i(a) = \beta_{i+1},$$

donc la colonne des coordonnées de $u(\beta_i)$ dans la base $\mathcal{B}_a$ est une colonne dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la $i+1$-ième, égale à 1.

De plus, notons $\begin{pmatrix} -b_0 \\ \vdots \\ -b_{n-1} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de $u(\beta_n)$ dans la base $\mathcal{B}_a$. Alors, la matrice de $u$ relativement à la base $\mathcal{B}_a$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a}(u)$ est la matrice compagnon du polynôme

$$P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0.$$