 Samedi 27 mars 2010.

Correction du Devoir Surveillé n° 8
Épreuve de type « Ecricome »

Exercice 1 – (Ecricome 2006)

Exercice sans aucune difficulté, mais qui, d'après le rapport du jury, a été loin d'être bien traité par les candidats l'année où il est tombé...

A. Quelques propriétés de f^*

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, de coordonnées X et Y. La matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ est MX, et celle des coodronnées de $f^*(y) = {}^tMY$. Ainsi :
$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX\, {}^tMY = \langle x, f^*(y)\rangle .$$
2. Soit g un endomorphisme vérifiant cette relation. Alors, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$,
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle .$$
En particulier, en renommant pour plus de simplicité d'écriture (b_1, b_2, b_3) la base canonique,
$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad \forall i \in [\![1, 3]\!], \quad \langle f^*(y), b_i\rangle = \langle g(y), b_i\rangle .$$
Or, la base canonique étant une base orthonormale, on en déduit que :
$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad f^*(y) = \sum_{i=1}^{3} \langle f^*(y), b_i\rangle\, b_i = \sum_{i=1}^{3} \langle g(y), b_i\rangle\, b_i = g(y).$$
Ainsi, $f^* = g$, ce qui prouve bien l'unicité de g vérifiant cette propriété.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).
   (a) Soit $(x, y) \in F \times F^\perp$. On a :
   $$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = 0,$$
   car par stabilité de F, $f(x) \in F$, donc $f(x) \perp y$.
   (b) Par conséquent, soit $y \in F^\perp$. Alors, pour tout $x \in F$, $\langle x, f^*(y)\rangle = 0$, donc $x \perp f^*(y)$. Cela étant vrai pour tout x de F, il en résulte que $f^*(y) \in F^\perp$. Ainsi, $F^\perp$ est stable par f^*.

B. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$

1. • L'ensemble $\mathcal{E}$ est évidemment un sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   • L'endomorphisme nul est clairement dans $\mathcal{E}$ (avec $a = b = c = 0$), donc $\mathcal{E} \neq \varnothing$
   • Soit f et g dans $\mathcal{E}$. Il existe $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ tels que $f = f_u$ et $g = f_v$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la matrice de $f + \lambda g$ dans la base canonique est :
   $$M_{u+\lambda v} = \begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ c+\lambda c' & a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ b+\lambda b' & c+\lambda c' & a+\lambda a' \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $f_u + \lambda f_v = f_{u+\lambda v}$, donc c'est aussi un élément de $\mathcal{E}$.

   Par conséquent, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Clairement ${}^tM_{(a,b,c)} = M_{(a,c,b)}$, donc $f^*_{(a,b,c)} = f_{(a,c,b)} \in \mathcal{E}$.

3. (a) Notons $[x]_{\text{b.c.}}$ le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x dans la base canonique. On a, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$:

$$[f_u(e_1)]_{\text{b.c.}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c)e_1.$$

Comme e_1 est non nul, il en résulte que e_1 est un vecteur propre de f_u, associé à la valeur propre $a+b+c$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathcal{D}$. Il existe ν tel que $x = \nu e_1$. Comme e_1 est un vecteur propre associé à une certaine valeur propre λ, il vient

$$f_u(x) = \nu f_u(e_1) = \nu\lambda e_1 \in \mathcal{D}.$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

(c) Vous m'avez fait rectifier trop vite : il n'y avait pas d'étoile.
Soit u dans $\mathbb{R}^3$, $u = (a, b, c)$, et soit $v = (a, c, b)$. Alors $\mathcal{D}$ est stable par f_v, donc $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f_v^* = f_u$.

(d) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, de coordonnées $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Alors

$$v \in \mathcal{D}^\perp \iff v \perp \mathcal{D} \iff v \perp e_1 \iff \left\langle V, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{D}^\perp$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

(e) Les coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifient bien l'équation de la question précédente. Donc $i - j$ et $i + j - 2k$ sont des éléments de $\mathcal{D}^\perp$. De plus, e_2 et e_3 sont colinéaires respectivement à ces deux vecteurs. Donc ils sont dans $\mathcal{D}^\perp$.
Par ailleurs :

- $\langle e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0;$
- $\langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{2} (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, donc $\|e_2\| = \sqrt{1} = 1$
- $\langle e_3, e_3 \rangle = \frac{1}{6} (1 \quad 1 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1$, donc $\|e_3\| = \sqrt{1} = 1$

Donc (e_2, e_3) est une famille orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ (donc en particulier libre), et de plus, $\mathcal{D}^\perp$ étant le supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ d'une droite, $\mathcal{D}^\perp$ est de dimension 2. Ainsi, cette famille libre de cardinal 2 est une base de $\mathcal{D}^\perp$, et cette base est orthonormale.
On vérifie rapidement qu'on a aussi $\|e_1\|^2 = 1$, donc e_1 est un vecteur unitaire de la droite $\mathcal{D}$, donc (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$. Ainsi, la juxtaposition d'une base orthonormale de $\mathcal{D}$ et d'une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, il en résulte que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

(f)
- Puisque e_1 est un vecteur propre de f_u, il existe e tel que $f_u(e_1) = ee_1 = ee_1 + 0e_2 + 0e_3$, d'où la première colonne.
- Puisque $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u, $f_u(e_2) \in \mathcal{D}^\perp$, et comme (e_2, e_3) est une base de $\mathcal{D}^\perp$, il existe (f, h) des réels tels que

$$f_u(e_2) = 0e_1 + fe_2 + he_3,$$

d'où la deuxième colonne.
- De même pour $f_u(e_3)$.

Exercice 2 – (Ecricome 2009)

1. **Domaine de définition de f**

 (a) La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}_+$, cette intégrale n'admet qu'une impropreté en $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors
$$\int_0^A \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\Big]_0^A = \frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-aA}).$$
 Cette expression admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$, car $-aA$ tend vers $-\infty$ (puisque $a>0$). Donc l'intégrale converge, et
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

 (b) Soit x un réel fixé. Soit f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad f_x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}$.
 La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale admet une unique impropreté en $+\infty$. De plus,
 - si $x=0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t$, et cette intégrale converge d'après la question précédente.
 - si $x \neq 0$, alors $x^2>0$, donc $1 = o(x^2\mathrm{e}^{2t})$, donc
$$1+x^2\mathrm{e}^{2t} \underset{t\infty}{\sim} x^2\mathrm{e}^{2t} \qquad \text{donc:} \qquad \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{t} \qquad \text{donc:} \qquad f_x(t) \underset{t\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{-t}.$$
 Or, d'après la question 1(a), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison (les fonctions considérées étant positives), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**

 (a) Soit $x>0$ et $t \geqslant 0$. Toutes les quantités de l'encadrement à démontrer étant positives, cet encadrement équivaut à l'encadrement obtenu en élevant au carré :
$$x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant 1+x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant \left(x\mathrm{e}^{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\mathrm{e}^{2t} + 1 + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2}.$$
 Cet encadrement est évidemment vérifié !

 (b) L'encadrement de la question précédente amène :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\quad x\mathrm{e}^{-t} \leqslant f_x(t) \leqslant x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x},$$
 d'où, en intégrant cette inégalité, par croissance de l'intégrale, et toutes les intégrales étant convergentes, d'après les questions 1(a) et 1(b),
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{d}t.$$
 En utilisant la question 1(a), il vient alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$.

 (c) Nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{6x},$$
 donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y=x$, et se situe au dessus de cette asymptote.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**

 (a) Soit x strictement positif. La fonction $\varphi : t \mapsto x\mathrm{e}^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[x,+\infty[$. Ainsi, le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ est valide, et $\mathrm{d}u = x\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$. On obtient :
$$f(x) = x^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3\mathrm{e}^{3t}}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}x\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = x^2\int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u.$$

(b) • La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}$ étant continue entre 1 et x, pour tout $x > 0$, elle est primitivable, et une primitive (celle s'annulant en 1) est donnée par :

$$g : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Cette primitive est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u - g(x) = C - g(x),$$

où C est une constante, et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

• Ainsi, f est le produit de la fonction « carré » et de la fonction h, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Avec les notations précédentes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \frac{1}{u^3}\sqrt{1+u^2}\ \mathrm{d}u - x^2 g'(x) = \frac{2}{x}f(x) - \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(c) On effectue une intégration par parties sur l'intégrale

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}u^3}{\mathrm{d}u},$$

en posant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$, définies pour tout $u \in [x, +\infty[$ par :

$$\alpha(u) = \sqrt{1+u^2}, \qquad \alpha'(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \beta(u) = -\frac{1}{2u^2}, \qquad \beta'(u) = \frac{1}{u^3}.$$

On a : $\forall u \in [x, +\infty[,\quad \alpha(t)\beta(t) = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2} \underset{u\infty}{\sim} -\frac{1}{2u}$.

Ainsi, $\alpha\beta$ admet une limite, égale à 0, en $+\infty$. L'existence de cette limite nous autorise à faire l'intégration par parties directement sur -l'intégrale impropre, et on obtient :

$$I(x) = \Big[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2} - \Big]_x^{\lim_{+\infty}} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

On obtient donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad 2f(x) = 2x^2 I(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

En reprenant la relation de la question 3(b), on obtient alors, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

Puisque l'intégrande est strictement positive continue sur $[x, +\infty[$, l'intégrale est strictement positive, donc

$$\forall x > 0,\quad f'(x) > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, =\infty[$.

Cela dit, c'est bien compliqué pour en arriver là, car il suffisait de constater que si $x < y$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_x(t) < f_y(t)$, et la stricte positivité de l'intégrale permet de conclure...

4. **Étude locale de f et f' en 0**

(a) On refait une intégration par partie, en posant α et β les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ définies de la façon suivante : pour tout $t \geqslant x$,

$$\alpha(u) = (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \alpha'(u) = -u(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}, \qquad \beta(u) = \ln u, \qquad \beta'(u) = \frac{1}{u}.$$

Nous avons :

$$\forall u \in [x, +\infty[, \quad \alpha(u)\beta(u) = (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} \ln u \underset{u\infty}{\sim} \frac{\ln u}{u},$$

donc, d'après les croissances comparées, $\alpha\beta$ admet une limite nulle en $+\infty$. On peut donc encore une fois effectuer l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \Big[(1+u^2)^{-frac12} \ln u\Big]_x^{\lim_{+\infty}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

Remarquez que le théorème d'intégration par partie nous assure de la convergence en la borne $+\infty$ de l'intégrale obtenue. Ainsi, la fonction intégrée étant continue ailleurs, il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ en la borne 0. Or, puisque $u \ln u \to 0$ en 0, la fonction $u \mapsto \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ peut se prolonger par continuité en 0 (en la définissant égale à 0 en 0). Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre en 0, donc convergente en cette borne.

(b) Lorsque $x \to 0^+$, $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ tend vers $-\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$. tend vers une limite finie, donc est négligeable devant $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi, l'égalité de la question précédente amène :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

En revenant à l'expression de f' trouvée en 3(c), on en déduit que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x).$$

De même, on a :

$$x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^2 \ln x, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0^+}{\sim} \frac{x^2}{2} = o(-x^2 \ln x),$$

donc, d'après l'expression trouvée en 3(c),

$$2f(x) - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^2 \ln x \qquad \text{donc:} \qquad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) L'équivalent de f' nous assure, d'après les croissances comparées, que f' tend vers 0 en 0. Donc, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la restriction $f_{|]0,+\infty[}$ se prolonge par continuité en une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et vérifiant $g'(0) = 0$. Il suffit de montrer que ce prolongement par continuité coïncide avec f, donc que f est continue en 0.
Cela provient du deuxième équivalent, qui assure que f tend vers $\frac{1}{2}$ en 0, ce qui correspond au calcul direct de $f(0)$ (question 1(a) avec $a = 2$).
Ainsi, $f_{|[0,+\infty[}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est dérivable à droite en 0 avec

$$f'_d(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Par parité, on a aussi la dérivabilité à gauche, et les égalités :

$$f'_g(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Ainsi, puisque $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$, f est dérivable en 0, et les limites ci-dessus amènent :

$$f'(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f'(x).$$

Ainsi, f est dérivable en 0, et f' est continue en 0.
Comme on avait déjà le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et même sur $\mathbb{R}$, par parité.

Problème – (Ecricome 2007) –

Préliminaire

1. La définition de la covariance amène, pour toutes variables admettant une variance :

$$\mathrm{cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X).$$

De plus, on a clairement $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$, et par linéarité de l'espérance, $\mathrm{cov}(\lambda X + X', Y) = \lambda \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X',Y)$, et de même pour la deuxième variable (à redémontrer, car ce n'est au programme que pour les variables discrètes). Donc, on peut utiliser la propriété de bilinéarité de la covariance pour obtenir :

$$V(\lambda X+Y) = \mathrm{cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y) = \lambda^2\mathrm{cov}(X,X)+2\lambda\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Y,Y) = \lambda^2 V(X)+2\lambda\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y).$$

2. (a) Soit X et Y deux variables aléatoires fixées admettant une variance. La variance étant toujours positive, le polynôme ci-dessus en λ est toujours positif ou nul, et donc admet au plus une racine réelle. Ainsi, son discriminant Δ est négatif ou nul, donc :

$$0 \geqslant \Delta = 4\mathrm{cov}(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y), \qquad \text{donc:} \qquad V(X)V(Y) \leqslant \mathrm{cov}(X,Y)^2.$$

   (b) Cette inégalité est une égalité si et seulement $\Delta = 0$, donc si et seulement si il existe une valeur (unique) λ telle que $V(\lambda X + Y) = 0$, donc telle que $\lambda X + Y$ soit une variable quasi-certaine de valeur C. Ainsi, Y dépend de X de façon affine (presque sûrement) : $Y = C - \lambda X$.

Partie I – Étude d'une fonction de deux variables

1. Sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$ L_n coïncide avec la fonction $(a,b) \mapsto \frac{1}{b^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$.
   - La fonction $b \mapsto \frac{1}{b^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc la fonction de deux variables $(a,b) \mapsto \frac{1}{b^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$.
   - La fonction (polynomiale) $(a,b) \mapsto -na + S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, ainsi que la fonction $(a,b) \mapsto \frac{1}{b}$ (pour la même raison que le premier point). Ainsi la fonction $(a,b) \mapsto -\frac{1}{b}(-na+S)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions qui le sont.
   - La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine, donc, par composition, la fonction $(a,b) \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$.
   - Ainsi, L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions qui le sont.
   - De plus, $]0,A[\times]0,+\infty[$ est un ouvert en tant que produit cartésien de deux ouverts.

   La fonction L_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, on peut calculer ses dérivées partielles :

$$\forall (a,b) \in]0,A[\times]0,+\infty[, \quad \partial L_n \partial a(a,b) = \frac{n}{b^{n+1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$$

   Ce calcul est suffisant, puisque cette dérivée partielle ne peut pas s'annuler sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ (elle est toujours strictement positive). Ainsi, ∇L_n ne s'annule pas sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, donc L_n, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, n'admet pas de point critique sur cet ouvert, donc pas d'extremum local (donc a fortiori pas d'extremum global) sur cet ouvert.

2. Soit $b > 0$ fixé. Alors la fonction $a \mapsto -\frac{1}{b}(-na+S)$ est strictement croissante sur $[0,A]$ (droite de coefficient directeur $\frac{n}{b} > 0$), donc, l'exponentielle étant croissante, et b étant fixé, la fonction $a \mapsto L_n(a,b)$ est strictement croissante sur $[0,A]$. On en déduit que :

$$\forall a \in [0,A[, \quad L_n(a,b) \leqslant L_n(A,b).$$

   Cela est vrai quelle que soit la valeur fixée de b dans $]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\forall a \in [0,A[, \quad \forall b \in]0,+\infty[, \quad L_n(a,b) < L_n(A,b).$$

   Soit maintenant $a \in]A,+\infty[$, et $b > 0$. Alors $L_n(a,b) = 0$ et $L_n(A,b) > 0$, donc on a encore $L_n(a,b) < L_n(A,b)$.

3. La fonction g est définie par :

$$\forall b \in]0,+\infty[, \quad g(b) = \frac{1}{b^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et :

$$\forall b \in]0,+\infty[, \quad g'(b) = \frac{-n}{b^{n+1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} + \frac{-nA+S}{b^2 b^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} = \frac{-n(A+b)+S}{b^{n+2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

Puisque par hypothèse, $S - nA > 0$, la fonction g est donc strictement croissante sur $]0, \frac{S-nA}{n}]$ et strictement décroissante sur $]\frac{S-nA}{n}, +\infty[$. Ainsi, g admet un maximum absolu sur $]0,+\infty[$ au point $b_0 = \frac{S-An}{n} = \frac{S}{n} - A$.

4. Soit alors un point (a,b) quelconque de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Alors

$$L_n(a,b) \leqslant L_n(A,b) = g(b) \leqslant g(b_0) = L_n(A,b_0).$$

De plus, si $(a,b) \neq (A,b_0)$, soit $a \neq A$, et dans ce cas, la première inégalité est stricte, soit $b \neq b_0$, et dans ce cas, la deuxième inégalité est stricte. Ainsi, on a, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $L_n(a,b) \leqslant L_n(A,b_0)$, avec égalité si et seulement si $(a,b) = (A,b_0)$. Donc L_n présente au point (A,b_0) (et en ce seul point) un maximum absolu. On a donc $a_0 = A$ et $b_0 = \frac{S}{n} - A$.

Partie II – Étude d'une loi

1. • $f_{a,b}$ est évidemment positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
   • $f_{a,b}$ est continue sur $]-\infty, a[$ (coïncide sur cet <u>ouvert</u> avec la fonction nulle) et sur $]a,+\infty[$ (coïncide sur cet ouvert avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}$, continue, en tant que composée de fonctions continues). Donc $f_{a,b}$ admet au plus un point de discontinuité, au point a. Donc $f_{a,b}$ est continue presque partout.
   • On a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}} \, \mathrm{d}x.$$
   Effectuons le changement de variable affine strictement croissant (donc valide) $t = x - ab$, donc $\mathrm{d}x = b \, \mathrm{d}t$. La nature de l'intégrale ci-dessus est alors la même que la nature de l'intégrale
   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} b \, \mathrm{d}t,$$
   qui est convergente en tant qu'intégrale $\Gamma(1)$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) \, \mathrm{d}x$ converge, et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \cdot b \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1) = 0! = 1.$$

   Donc $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.
2. On a, pour tout $x < a$, $F_X(x) = 0$, et :
   $$\forall x \geqslant a, \quad F_X(x) = \frac{1}{b} \int_a^x \mathrm{e}^{-\frac{t-a}{b}} \, \mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{t-a}{b}} \Big]_a^x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}.$$
3. On pose $Y = X - a$. On a, pour tout y de $\mathbb{R}$:
   $$P(Y \leqslant y) = P(X - a \leqslant y) = P(X \leqslant a+y) = F_X(a+y) \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{a+y-a}{b}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y}{b}} & \text{si } a+y \geqslant a \text{ i.e. } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   On reconnaît la fonction de répartition d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$: $X - a \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{b}\right)$.
   Ainsi, $E(Y) = b$ et $V(Y) = b^2$, donc $E(X) = E(Y) + a = b + a$ et $V(X) = V(Y) = b^2$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$, Par le changement de variables $y = \frac{x-a}{b}$, l'intégrale $I_p = \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_a^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que l'intégrale $\frac{1}{b}\int_0^{+\infty}(by+a)^p\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$.
Or, cette intégrale possède une seul improprété en $+\infty$, par continuité de l'intégrande sur $[0,+\infty[$, et

$$(by+a)^p\,\mathrm{e}^{-y} \underset{y\to+\infty}{\sim} b^p y^p.$$

Ainsi, les fonctions ci-dessus étant positives, l'intégrale $\dfrac{1}{b}\displaystyle\int_a^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^p\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$, qui converge en tant qu'intégrale $\Gamma(p+1)$, avec $p+1>0$. Ainsi, X admet un moment d'ordre p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Soit $p \geqslant 1$. On effectue une intégration par parties sur I_p, en posant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$:

$$\forall x \in [a,+\infty[,\quad u(x) = x^p \qquad u'(x) = px^{p-1} \qquad v(x) = -b\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}} \qquad v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}.$$

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$, donc on peut faire l'intégration par parties sur l'intégrale impropre directement, et :

$$E(X^p) = I_p = \frac{1}{b}\Big[-bx^p\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\Big]_a^{\lim_{+\infty}} + \frac{1}{b}\int_a^{+\infty} bpx^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x = a^p + bpE(X^{p-1}).$$

5. Simulation de la loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   (a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$. On a alors :

   $$\forall y \in \mathbb{R},\quad F_U(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ y & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geqslant 1. \end{cases}$$

   Soit $X = -b\ln(1-U)+a$. On a $U(\Omega) = [0,1[$, donc $\ln(1-U)(\Omega) =]-\infty,0]$, donc $X(\Omega) = [a,+\infty[$, puisque $b>0$.
   Ainsi, pour tout $x<a$, $F_X(a) = 0$.
   Soit $x \geqslant a$. Alors :

   $$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &= P(-b\ln(1-U)+a \leqslant x) = P(-b\ln(1-U) \leqslant x-a) = P(\ln(1-U) \geqslant -\frac{x-a}{b}) \\ &= P(1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}) = P(U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}). \end{aligned}$$

   Comme $x \geqslant a$, $-\frac{x-a}{b} \leqslant 0$, donc $\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}} \in]0,1]$, donc $1-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}} \in [0,1[$. Ainsi :

   $$F_X(x) = F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}.$$

   On reconnaît donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   Par conséquent, $-b\ln(1-U)+a \hookrightarrow \mathcal{E}(a,b)$.
   (b)
   ```
   function tirage(a,b:real):real;
   begin
     tirage:= -b * ln(1-random)+a;
   end;
   ```

Partie III – Estimation des paramètres a et b

1.
```
begin
  randomize;
  readln(a,b,n);
  X:=tirage(a,b);
  S:=X;
```

```
    Y:=X;
    for i:=2 to n do
      begin
        X:=tirage(a,b);
        S:=S+X;
        if X > Y then Y:=X;
      end;
  end.
```

2. • On a, par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = n(a+b)$.
   • Les variables X_i étant mutuellement indépendantes, on a : $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nb^2$.
3. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i - a \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{b}\right) = \Gamma(b,1)$, et ces variables sont mutuellement indépendantes. Donc, par stabilité de la loi Γ,
$$(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a) \hookrightarrow \Gamma(b,n) \qquad \text{donc:} \qquad S_n - na \hookrightarrow \Gamma(b,n)$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si F désigne la fonction de répartition d'une variable suivant la loi $\Gamma(b,n)$:
$$P(S_n \leqslant x) = P(S_n - na \leqslant x - na) = F(x - na).$$
Par dérivation (presque partout), on obtient une densité de S_n :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{S_n}(x) = f(x - na),$$
où f est une densité d'une variable suivant $\Gamma(b,n)$. Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{S_n}(x) = \frac{(x-na)^{n-1}}{b^n \Gamma(n)} \mathrm{e}^{-\frac{x-na}{b}} = \frac{(x-na)^{n-1}}{b^n (n-1)!} \mathrm{e}^{-\frac{x-na}{b}}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$P(Y_n \leqslant x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x),$$
par mutuelle indépendance des X_i. Ainsi
$$P(Y_n \leqslant x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\right)^n = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b/n}}.$$
Ainsi, Y_n suit une loi $\mathcal{E}\left(a, \frac{b}{n}\right)$.
On en déduit : $E(Y_n) = a + \frac{b}{n}$ et $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$.
5. (a) On a donc :
$$b_{Y_n}(a) = E(Y_n) - a = \frac{b}{n} \qquad \text{et} \qquad r_{Y_n}(a) = V(Y_n) + b_{Y_n}(a)^2 = \frac{2b^2}{n^2}.$$
   (b) Soit X une variable admettant un moment d'ordre 2. L'inégalité de Markov s'écrit, pour une variable positive, d'espérance non nulle :
$$P(X \geqslant \lambda E(X)) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$
On a vu également le corollaire suivant (obtenu en posant $\lambda = \frac{1}{E(X)}$) :
$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$
Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$,
$$P(|Y_n - a| \geqslant \varepsilon) = P((Y_n - a)^2 \geqslant \quad {}^2) \leqslant \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{Y_n}(a)}{\varepsilon^2}.$$
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, le risque quadratique étant de limite nulle, et les probabilités étant positives, on en déduit que
$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - a| \geqslant \varepsilon) = 0.$$
De plus, la limite du biais est nulle aussi, donc Y_n est une suite d'estimateurs de a, asymptotiquement sans biais, et convergente.

6. On pose $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$.
   (a) On a : $E(Z_n) = \frac{E(S_n)}{n} - E(Y_n) = (a+b) - a - \frac{b}{n} = b\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc :
   $$b_{Z_n}(b) = b + \frac{b}{n} - b = \frac{b}{n}.$$
   (b) On a :
   $$V(Z_n) = V\left(\frac{S_n}{n} - Y_n\right) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) + V(Y_n) - 2\mathrm{cov}\left(\frac{S_n}{n}, Y_n\right) = \frac{b^2}{n} + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\mathrm{cov}(S_n, Y_n).$$
   Ainsi,
   $$r_{Z_n}(b) = V(Z_n) + b_{Z_n}(b) = \frac{b^2}{n} + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\mathrm{cov}(S_n, Y_n) + \frac{b^2}{n^2} = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}\mathrm{cov}(S_n, Y_n).$$
   (c) D'après le prélimiaire, on a :
   $$|\mathrm{cov}(S_n, Y_n)| \leqslant \sqrt{V(S_n)V(Y_n)} = \sqrt{nb^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{\sqrt{n}}.$$
   Donc $\mathrm{cov}(S_n, Y_n)$ tend vers 0. Il en est de même des autres termes de $r_{Z_n}(b)$, donc
   $$\lim_{n \to +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$
   On a clairement $\lim_{n \to +\infty} b_{Z_n}(b) = 0$, donc (Z_n) est asymptotiquement sans biais, et en utilisant le même raisonnement que précedemment (à l'aide de l'inégalité de Markov), pour tout $\quad > 0$:
   $$0 \leqslant P(|Z_n - b| \geqslant \varepsilon) = P((Z_n - b)^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E((Z_n - b)^2)}{{}^2} = \frac{r_{Z_n}(b)}{\varepsilon^2} \to 0,$$
   d'où la convergence de (Z_n) en tant que suite d'estimateurs de b.
7. Pour un échantillon donné $(x_1, \dots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \dots, x_n\} \neq \max\{x_1, \dots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :
   $$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$
   (a) On a, si $\min(x_1, \dots, x_n) \geqslant a$ (donc si pour tout i, $x_i \geqslant a$: (donc $x_i \geqslant a$) :
   $$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} \mathrm{e}^{-\frac{x_i - a}{b}} = \frac{1}{b^2} \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i - a}{b}} = \frac{1}{b^2} \mathrm{e}^{-\frac{S - na}{b}},$$
   où $S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. En revanche, si $\min(x_1, \dots, x_n) < a$, il existe i tel que $x_i < a$, et $f_{a,b}(x_i) = 0$, donc $L(a, b) = 0$. Ainsi, la fonction L est égale à L_n avec $S = x_1 + \dots + x_n$, et $A = \min(x_1, \dots, x_n)$. Ces valeurs S et A vérifient bien
   $$S = \sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} \min(x_1, \dots, x_n) = nA,$$
   l'inégalité étant stricte, car la minoration est stricte pour au moins un des termes x_i, puisque $\min(x_1, \dots, x_n) \neq \max(x_1, \dots, x_n)$.
   (b) L'estimation de a obtenue à l'aide de Y_n est :
   $$\tilde{a} = Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = \min(x_1, \dots, x_n) = A = a_0,$$
   et l'estimation de b est :
   $$\tilde{b} = Z_n(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{n} - Y_n(\omega) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \min(x_1, \dots, x_n) = \frac{S}{n} - A = b_0.$$