Samedi 27 mars 2010.

Correction du Devoir Surveillé n° 8
Épreuve de type « Parisiennes »

Problème – (HEC-ESSEC-EAP 2009, Maths 2)

Préliminaire

Tout d'abord, Y prenant un nombre fini de valeurs, $E(Y)$ existe. De plus,

$$\sum_{k=1}^{N-1} P([Y>k]) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=k+1}^{N} P(Y=\ell) = \sum_{0\leqslant k<\ell\leqslant N} P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=0}^{\ell-1} P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(Y=\ell) = E(Y).$$

De même,

$$\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(Y>k) = \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=0}^{\ell-1}(2k+1)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{N}(\ell(\ell-1)+\ell)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{N}\ell^2 P(Y=\ell) = E(Y^2).$$

Partie I – Inf et Sup

Une remarque prélimiaire aux calculs de cette partie : le cas $N=1$ est un peu spécial, du fait de l'expression spécifique de $d_n(1)$. On peut vérifier trivialement ce cas à part, les variables U_i étant dans ce cas des variables constantes. On peut aussi constater que par convention, l'expression de $d_n(N)$ sous forme d'une somme est aussi valable pour $N=1$, une somme vide étant par convention égale à 0. Ainsi, le cas $N=1$ rentre en fait dans le cas général.

1. U_1 suit une loi uniforme discrète sur $[\![1,N]\!]$, donc $E(U_1)=\frac{N+1}{2}$, et $V(U_1)=\frac{N^2-1}{12}$.
2. (a) Soit $k\in[\![1,N]\!]$.

$$P(T_n\leqslant k) = P(\sup(U_1,\dots,U_n)\leqslant k) = P\left([U_1\leqslant k]\cap\cdots\cap[U_n\leqslant k]\right).$$

Les U_i étant mutuellement indépendants, on en déduit que :

$$P(T_n\leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i\leqslant k).$$

Or pour tout $i\in[\![1,N]\!]$,

$$P(U_i\leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} P(U_i=k) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{N} = \frac{k}{N}.$$

Par conséquent

$$P(T_n\leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

(b) Ainsi, la loi de T_n est décrite par :

$$T_n(\Omega)=[\![1,N]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k\in[\![2,N]\!],\ P(T_n=k)=P(T_n\leqslant k)-P(T_n\leqslant k-1)=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

Cette expression est encore valable pour $k=1$, puisque dans ce cas le deuxième terme est nul.

3. (a) La valeur N étant fixée, la somme définissant $d_n(N)$ possède un nombre fini et constant de termes. De plus, chacun de ces termes est le terme d'une suite géométrique, de raison $\frac{k}{N}$, avec $k \in [\![1, N-1]\!]$, donc de raison comprise dans l'intervalle $]0,1[$. Par conséquent, ces suites géométriques tendent vers 0, et les règles sur les limites de sommes finies amènent :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \sum_{k=1}^{N-1} 0 = 0.$$

(b) T_n prenant un nombre fini de valeurs, $E(T_n)$ existe, et, d'après le préliminaire :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} P(T_n > k) = \sum_{k=1}^{N}(1 - P(T_n \leqslant k)) = N - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = N - d_n(N).$$

Par conséquent, d'après la limite trouvée pour $(d_n(N))$,

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N.$$

(c) On calcule dans un premier temps le moment d'ordre 2, toujours en utilisant le préliminaire :

$$\begin{aligned}
E(T_n^2) &= \sum_{k=1}^{N}(2k+1)P(T_n > k) = \sum_{k=1}^{N}(2k+1) - \sum_{k=1}^{N}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N(N-1) + N - \sum_{k=1}^{N-1}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N^2 - 2N\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = N^2 - 2Nd_{n+1}(N) - d_n(N).
\end{aligned}$$

D'après la formule de König-Huygens, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
V(T_n) &= E(T_n^2) - E(T_n)^2 = N^2 - 2Nd_{n+1}(N) - d_n(N) - (N - d_n(N))^2 \\
&= (2N-1)d_n(N) - d_n(N)^2 - 2Nd_{n+1}(N).
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$.

(d) Supposons $N \geqslant 2$. On rappelle que pour tout $(r,s) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < s$, on a $r^n = o(s^n)$. Ainsi

$$\forall k \in [\![1, N-2]\!], \left(\frac{k}{N}\right)^n = o\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).$$

On en déduit que

$$d_n(N) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{N}\right)^n} = 1 - \frac{1}{N}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{V(T_n)}{d_n(N)} = (2N-1) - 2N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n(N),$$

d'où, en passant à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V(T_n)}{d_n(N)} = (2N-1) - 2N\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2N - 1 - 2N + 2 = 1.$$

Par conséquent, $V(T_n) \underset{+\infty}{\sim} d_n(N)$.

4. On a $Z_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Soit $k \in [\![1, N]\!]$. De même que pour T_n, on obtient

$$P(Z_n \geqslant k) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \geqslant k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$:

$$P(Z_n = k) = P(Z_n \geqslant k) - P(Z_n \geqslant k+1) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$$

Cette expression est encore valable pour $k = N$, du fait que le second terme est nul.
On se rend compte que $Y_n = N + 1 - Z_n$ suit la même loi que T_n : en effet, $Y_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$, et

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\quad P(Y_n = k) = P(N+1-Z_n = k) = P(Z_n = N+1-k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = P(T_n = k).$$

Ainsi, $E(Y_n) = E(T_n) = N - d_n(N)$, et $V(Y_n) = V(T_n)$. On obtient donc :

$$E(Z_n) = N+1-E(Y_n) = 1+d_n(N) \qquad \text{et} \qquad V(Z_n) = (-1)^2 V(Y_n) = (2N-1)d_n(N) - d_n(N)^2 - 2Nd_{n+1}(N).$$

Retenez cette astuce permettant de comparer la loi du min et la loi du max, c'est valable dès lors qu'on travaille avec une loi possédant une symétrie

5. À chaque tirage, on compare le résultat obtenu au maximum des précédents. Si on obtient un tirage supérieur à ce maximum, c'est le nouveau maximum provisoire, sinon, le maximum provisoire n'est pas modifié. Cela donne la fonction suivante (en supposant qu'on dispose d'une constante N définie dans l'entête). On suppose aussi que l'initialisation du générateur aléatoire par `randomize` se fait dans le copre de programme.

```
function simulmax(n:integer):integer;
var i,m,k:integer;
begin
  m:=random(N)+1;   {initialisation du max par la première valeur tirée}
  for i:=2 to n do
    begin
      k:=random(N)+1;
      if k>m then m:=k;
    end;
  simulmax:=m;
end;
```

Partie II – Couple (Inf , Sup)

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$:

$$\varphi_n(k, \ell) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]).$$

(a) • Supposons que $k \leqslant \ell$. Alors :

$$[T_n \leqslant k] \subset [Z_n \leqslant \ell].$$

En effet, si le maximum est inférieur à k, le minimum aussi, et a fortiori, il est inférieur à ℓ. Ainsi

$$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = [T_n \leqslant k],$$

puis :

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) = P(T_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

d'après la question I-2(a).

- supposons que $k > \ell$. Alors

$$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = [T_n \leqslant k] \setminus [T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell + 1],$$

  d'où

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) = P(T_n \leqslant k) - P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell + 1]).$$

  Or, l'événement $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell + 1]$ est réalisé si et seulement si toutes les valeurs des U_i sont inférieures à k et supérieures à $\ell + 1$. Donc :

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell + 1]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\ell + 1 \leqslant U_i \leqslant k]\right),$$

  d'où, par indépendance des U_i, et du fait qu'ils suivent une loi uniforme :

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell + 1]) = \prod_{i=1}^{n} P(\ell + 1 \leqslant U_i \leqslant k) = \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.$$

  On en déduit bien que :

$$\varphi_n(k, \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(k,\ell) + \varphi_n(k-1,\ell-1) - \varphi_n(k-1,\ell) - \varphi_n(k,\ell-1) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} P(T_n = i, Z_n = j) + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{\ell-1} P(T_n = i, Z_n = j) \\
&\qquad\quad - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{\ell} P(T_n = i, Z_n = j) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell-1} P(T_n = i, Z_n = j).
\end{aligned}$$

En associant la première et la dernière somme, ainsi que la deuxième et la troisième, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(k,\ell) + \varphi_n(k-1,\ell-1) - \varphi_n(k-1,\ell) - \varphi_n(k,\ell-1) &= \sum_{i=1}^{k} P(T_n = i, Z_n = \ell) - \sum_{i=1}^{k-1} P(T_n = i, Z_n = \ell) \\
&= P(T_n = k, Z_n = \ell).
\end{aligned}$$

(c)
- Si $k < \ell$, alors $k - 1 < \ell - 1$, et $k \leqslant \ell - 1$, et $k - 1 \leqslant \ell$. Ainsi :

$$P(T_n = k, Z_n = \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k}{N}\right)^n = 0$$

  (logique : le minimum ne peut pas être strictement plus grand que le maximum)
- Si $k = \ell$, alors $k \leqslant \ell$, $k - 1 \leqslant \ell$ et $k - 1 \leqslant \ell - 1$, mais $k > \ell - 1$. Donc :

$$P(T_n = k, Z_n = \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k}{N}\right)^n + \left(\frac{k-k+1}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n.$$

  Encore une fois, c'était prévisible, c'est la probabilité que toutes les variables aléatoires U_i prennent la valeur k.
- On peut constater que pour $k = \ell$, les deux expressions définissant $\varphi(k, \ell)$ sont acceptables (le deuxième terme dans la deuxième expression étant nul). Ainsi, si $k > \ell$, on a aussi $k - 1 \geqslant \ell$, $k - 1 \geqslant \ell - 1$ et $k \geqslant \ell - 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
P(T_n = k, Z_n = \ell) &= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n \\
&\quad - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n - \left(\frac{k}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n \\
&= \left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

2. (a) D'après le théorème de transfert pour des couples de variables aléatoires discrètes :

$$\begin{aligned}
E(T_nZ_n) &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} k\ell P(T_n=k, Z_n=\ell) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{k-1} k\ell\left(\left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) + \sum_{k=1}^{N} k^2\left(\frac{1}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

Or, en faisant un changement d'indices $j = k-\ell$, et d'après les relations (i) (ii),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell\left(\left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) \\
&\quad= \frac{1}{N^n}\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\left((j-1)^n - 2j^n + (j+1)^n\right) \\
&\quad= \frac{k}{N^n}(k^n-(k-1)^n-1) - \frac{1}{N^n}((k-1)k^n - k(k-1)^n) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \frac{k}{N^n}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E(T_nZ_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\cdot\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2 2}{N^n} + \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2 2}{N^n} \\
&= N\sum_{k=1}^{N-1}\cdot\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} + N = N + Nd_{n+1}(N) = N(1+d_{n+1}(N)).
\end{aligned}$$

(b) On rappelle que $\rho_n = \dfrac{\operatorname{cov}(T_n,Z_n)}{\sigma(T_n)\sigma(Z_n)}$. Comme T_n et Z_n ont même variance, il vient :

$$\begin{aligned}
\rho_n = \frac{E(T_nZ_n)-E(T_n)E(Z_n)}{V(T_n)} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{N(1+d_{n+1}(N)) - (N-d_n(N))(1+d_n(N))}{d_n(N)} \\
&\underset{+\infty}{\sim} N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - (N-1) + d_N(N).
\end{aligned}$$

Or, d'après I-3(d),

$$\lim_{n\to+\infty} N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = N-1,$$

donc, comme $d_n(N)$ est de limite nulle,

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_n = 0.$$

3. (a) L'événement $[T_n = k]$ étant non quasi-impossible pour $k \in [\![1, N]\!]$, il vient :

$$P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell]) = \frac{P(T_n=k, Z_n=\ell)}{P(T_n=k)} = \begin{cases}
\dfrac{\left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k>\ell \\
\dfrac{\frac{1}{N^n}}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} & \text{si } k=\ell \\
0 & \text{si } k<\ell.
\end{cases}$$

Ainsi, après simplifications :

$$P_{[T_n=k]}([Z_n=\ell]) = \begin{cases}
\dfrac{(k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n}{k^n-(k-1)^n} & \text{si } k>\ell \\
\dfrac{1}{k^n-(k-1)^n} & \text{si } k=\ell \\
0 & \text{si } k<\ell.
\end{cases}$$

(b) On en déduit l'expression de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}
E(Z_n \mid [T_n = k]) &= \sum_{\ell=1}^{N} \ell P_{[T_n=k]}(Z_n = \ell) \\
&= \frac{1}{k^n - (k-1)^n} \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell((k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2\,(k-\ell)^n) + k \right) \\
&= \frac{1}{k^n - (k-1)^n}\,(k^n - k + k) = \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n},
\end{aligned}$$

le calcul de la somme ayant été effectué en II-2(a). Ainsi,

$$E(Z_n \mid [T_n = k]) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n}$$

Partie III – Prévision

1. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $([T_n = k])_{k \in [\![1,N]\!]}$, on a :

$$P([W_t(T_n) = t_k]) = \sum_{j=1}^{N} P_{T_n=j}(W_n(T_n) = t_k) P(T_n = j).$$

Or, si $[T_n = j]$ est réalisé, alors $\mathbf{1}_{T_n=\ell}$ prend la valeur 0 pour $\ell \neq j$ et la valeur 1 pour $\ell = j$. Par conséquent, $W_t(T_n)$ prend la valeur t_j Il faut alors supposer implicitement que les t_j sont deux à deux distincts, et il vient alors que si $[T_n = j]$ est réalisé, alors $[W_n(T_n) = t_k]$ ne peut pas être réalisé, sauf si $j = k$, et dans ce cas, on a l'assurance qu'il est réalisé. Ainsi :

$$P_{T_n=j}(W_n(T_n) = t_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, il vient :

$$P([W_t(T_n) = t_k]) = P(T_n = k).$$

2. On a, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}) &= \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{j=0}^{1} \ell j P(T_{n+1} = \ell, \mathbf{1}_{[T_n=k]} = j) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(T_{n+1} = \ell, \mathbf{1}_{[T_n=k]} = 1) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(T_{n+1} = \ell, T_n = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \ell P_{T_n=k}(T_{n+1} = \ell) P(T_n = k) = E(T_{n+1} \mid [T_n = k]) \times P(T_n = k).
\end{aligned}$$

3. (a) • Si $k > j$, l'événement $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]$ est impossible (car $\forall \omega \in \Omega,\ T_{n+1}(\omega) \geqslant T_n(\omega)$). Donc

$$P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = 0.$$

• Si $k = j$, l'événement $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]$ est réalisé si et seulement si, l'événement $[T_n = k]$ est réalisé, et U_{n+1} prend une valeur inférieure ou égale à k (cette valeur ne modifie pas la valeur du maximum provisoire). Ainsi, T_n et U_{n+1} étant indépendants,

$$\begin{aligned}
P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = k]) &= P(T_n = k, U_{n+1} \leqslant k) = P(T_n = k) P(U_{n+1} \leqslant k) \\
&= \frac{k}{N} \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{(k-1)}{N}\right)^n \right).
\end{aligned}$$

- Si $k < j$, l'événement $[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]$ est réalisé si et seulement si $[T_n = k]$ est réalisé, et on tire j au $n+1$-ième tirage, donc, toujours par indépendance :

$$P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = P(T_n = k)P(U_{n+1} = j) = \frac{1}{N}\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{(k-1)}{N}\right)^n\right).$$

(b) On obtient donc :

$$P_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j]) = \frac{P(T_n = k, T_{n+1} = j)}{P(T_n = k)} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } k < j \\ \frac{k}{N} & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

L'énoncé est un peu maladroit dans le sens où ces probabilités conditionnelles peuvent être obenues de manière directe, sans passer par la question précédente (si on y réfléchit bien, le raisonnement précédent fournit assez facilement ces probabilités conditionnelles, et cela éviterait d'avoir à passer par la loi de T_n).

(c) On a donc :

$$\begin{aligned} E(T_{n+1} \mid [T_n = k]) &= \sum_{j=1}^{N} jP_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j]) = \frac{k^2}{N} + \sum_{j=k+1}^{N} \frac{j}{N} \\ &= \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-k-1}(N-\ell) = \frac{k^2}{N} + (N-k) - \frac{(N-k-1)(N-k)}{2N} \end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient :

$$E(T_{n+1} \mid [T_n = k]) = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N}.$$

(d) Les valeurs prises par T_{n+1} étant en nombre fini, on peut utiliser la formule de l'espérance totale sur le système complet fini $([T_n = k])_{k \in [\![1,N]\!]}$, sans justification de convergence à donner :

$$\begin{aligned} E(T_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1} \mid [T_n = k])P(T_n = k) \\ &= \frac{N+1}{2}\sum_{k=1}^{N} P(T_n = k) + \frac{1}{2N}\left(\sum_{k=1}^{N} k^2 P(T_n = k) - \sum_{k=1}^{N} kP(T_n = k)\right) \\ &= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}(E(T_n^2) - E(T_n)). \end{aligned}$$

4. Soit $\omega \in \Omega$, et $i = T_n(\omega)$. Alors $W_t(T_n)(\omega) = t_i$ et

$$W_t(T_n)^2(\omega) = t_i^2 = \sum_{k=1}^{N} t_k^2 \mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega),$$

puisque dans ce cas $\mathbf{1}_{[T_n=i]}(\omega) = 1$, et pour tout $k \neq i$, $\mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega) = 0$.
Ceci étant vrai pour tout ω de Ω, on en déduit l'égalité demandée.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_N) = E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2].$$

(a) On a :

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2, \ldots, t_N) &= E(T_{n+1}^2 - 2W_t(T_n)T_{n+1} + W_t(T_n)^2) \\ & E(T_{n+1}^2) - 2E(T_{n+1}W_t(T_n)) + E(W_t(T_n)^2). \end{aligned}$$

Or, en notant $t^2 = (t_1^2, \dots, t_N^2)$, la question précédente amène $W_t(T_n)^2 = W_{t^2}(T_n)$, et donc, d'après la question III-1,

$$E(W_t(T_n)^2) = E(W_{t^2}(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} t_k^2 P(W_{t^2}(T_n) = t_k^2) = \sum_{k=1}^{N} t_k^2 P(T_n = k).$$

Remarquez que l'énoncé est maladroit : le résultat de la question 1 n'a été établi que pour des n-uplets d'éléments 2 à 2 distincts (il est faux sinon). Or, cette égalité, en revanche, ne nécessite pas cette restriction, puisque le résultat découle en fait simplement du théorème de tranfert appliqué à la fonction φ définie sur $[\![1, N]\!]$ par $\varphi(k) = t_k^2$. On a bien, alors, $W_{t^2}(T_n) = \varphi(T_n)$. L'expression de $E(W_t(T_n)^2)$ est alors immédiate est valable sans restriction (φ n'ayant pas besoin d'être injective, pour pouvoir utiliser le théorème de transfert).
On obtient également, d'après la question 2 et la définition de $W_t(T_n)$:

$$E(T_{n+1} W_t(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} t_k E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n = k]}) = \sum_{k=1}^{N} t_k E(T_{n+1} \mid T_n = k) P(T_n = k).$$

On obtient donc finalement l'expression de g : pour tout $(t_1, \dots, t_N) de [\![1, N]\!]$:

$$E(T_{n+1} W_t(T_n)) = E(T_{n+1}) + \sum_{k=1}^{N} \left(t_k^2 - 2t_k E(T_{n+1} \mid T_n = k)\right) P(T_n = k)$$

(b) Définissons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_k(x) = x^2 - 2x E(T_{n+1} \mid T_n = k).$$

Alors la fonction g_k est une fonction polynomiale de degré 2, et une étude rapide montre que g_k admet un minimum global en $\theta_k = E(T_{n+1} \mid T_n = k)$. On a alors, pour tout $(t_1, \dots, t_N)$,

$$g(t_1, \dots, t_N) = E(T_{n+1}) + \sum_{k=1}^{N} g_k(t_k) P(T_n = k) \geqslant E(T_{n+1}) + \sum_{k=1}^{N} g_k(\theta_k) P(T_n = k) = g(\theta_1, \dots, \theta_N),$$

l'égalité étant assurée (puisque les probabilités $P(T_n = k)$ sont strictement positives) si et seulement si pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $g_k(t_k) = g_k(\theta_k)$, ce qui entraîne $t_k = \theta_k$ (d'après les variations de g_k).
Ainsi, g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$, en un point unique $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \theta_k = E(T_{n+1} \mid [T_n = k]).$$

6. On a alors :

$$E(W_\theta(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} \theta_k P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1} \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(T_{n+1}),$$

d'après la formule de l'espérance totale.
De plus,

$$E(W_\theta(T_n)^2) = E(W_{\theta^2}(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1} \mid T_n = k)^2 P(T_n = k).$$

Or, dans tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et pour toute variable aléatoire X :

$$0 \leqslant V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Ainsi, $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$. Cela est vrai notamment dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$, où P_A est une mesure de probabilité conditionnelle. Ainsi, l'inégalité sur les espérances est aussi vraie pour les espérances conditionnelles, et on obtient :

$$E(W_\theta(T_n)^2) \leqslant \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1}^2 \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(T_{n+1}^2),$$

la dernière égalité résultant d'une nouvelle application de la formule des probabilités totales. Ainsi, d'après la formule de König-Huygens, puisque $E(T_{n+1}) = E(W_\theta(T_n))$, on en déduit que $V(W_\theta(T_n)) \leqslant V(T_{n+1})$.

7. (a) Soit $\omega \in \Omega$, et $j = T_n(\omega)$. Alors :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{N} k^i \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}(\omega) = j^i = T_n(\omega)^i.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\omega \in \Omega$, il en résulte que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{N} k^i \times \mathbf{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i.$$

(b) On a :

$$W_\theta(T_n) = \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1} \mid T_n = k)\mathbf{1}_{[T_n=k]} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N} \right) \mathbf{1}_{[T_n=k]},$$

d'après la question III-3(c). Ainsi :

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{[T_n=k]} + \frac{1}{2N} \left(\sum_{k=1}^{N} k^2 \mathbf{1}_{[T_n=k]} - \sum_{k=1}^{N} k \mathbf{1}_{[T_n=k]} \right).$$

Or, d'après la question précédente pour $i = 0$ (qui contrairement à ce que prétend l'énoncé, n'a pas besoin d'être exclus ; mais cela peut aussi rapidement se démontrer de manière directe), pour $i = 1$ et pour $i = 2$, on obtient :

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} T_n^0 + \frac{1}{2N} \left(T_n^2 - T_n \right) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N} \left(T_n^2 - T_n \right).$$

Partie IV – Estimation

1. (a) On a bien $E(T_n + d_n(N)) = N$, d'après les résultats de la partie I. Mais l'expression de $T_n + d_n(N)$ en fonction des U_i dépend du paramètre à estimer N. Ainsi, $T_n + d_n(N)$ n'est pas un estimateur.

(b)
- La variable T_n est définie à partir de l'échantillon i.i.d. $(U_1, \dots, U_n)$, indépendamment de N.
- L'ensemble Θ des valeurs possibles de N est $\mathbb{N}^*$. Or, pour tout $\omega \in \Omega$, T_n est le maximum d'un ensemble d'entiers strictement positifs, donc $T_n(\omega) \in \mathbb{N}^* = \Theta$.
- Enfin, d'après la question I-3(b), $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = N$.

Par conséquent, T_n est un estimteur asymptotiquement sans biais de N.

(c)
- Soit $\omega \in \Omega$ réalisant l'événement $A_n(\varepsilon)$ (c'est-à-dire $\omega \in A_n(\varepsilon)$). Alors :

$$|T_n(\omega) - N| \geqslant \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, nous avons donc :

$$|T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant |T_n(\omega) - E(T_n) + d_n(N)| = |T_n(\omega) - N| \geqslant \varepsilon,$$

d'après l'expression de $E(T_n)$ obtenue dans la partie I. Ainsi, ω réalise aussi l'événement $B_n(\varepsilon)$. Donc $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$.
- Puisque $d_n(N)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|d_n(N)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit alors ω réalisant $B_n(\varepsilon)$, on a donc

$$|T_n(\omega) - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \qquad \text{donc:} \qquad |T_n(\omega) - E(T_n)| \geqslant \varepsilon - |d_n(N)|.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$,

$$|T_n(\omega) - E(T_n)| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

et on en déduit que ω réalise l'événement $\left[|T_n - E(T_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Par conséquent, on en déduit l'inclusion

$$B_n(\varepsilon) \subset \left[|T_n - E(T_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

(d) On déduit des deux inclusions de la question précédente que :

$$A_n(\varepsilon) \subset \left[|T_n - E(T_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right],$$

donc

$$0 \leqslant P(A_n(\varepsilon)) \leqslant P\left(|T_n - E(T_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{4V(T_n)}{\varepsilon^2},$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Or, d'après la question I-3(c), $V(T_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$? Par conséquent, d'après la théorème d'encadrement $P(A_n(\varepsilon))$ admet une limite en $+\infty$, et

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(|T_n - N| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Par conséquent, (T_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à N. Par définition, on en déduit que (T_n) est un estimateur convergent du paramètre N.

2. (a) Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in [\![1, N]\!]^n$. Par indépendance mutuelle des U_i, et par description de la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i = u_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^n}.$$

(b) D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \frac{P\left([T_n = k] \cap \bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right)}{P(T_n = k)}.$$

- Si l'un des u_i n'est pas dans $[\![1, N]\!]$, $[U_i = u_i]$ est l'événement impossible, donc la probabilité du numérateur est nulle.
- Si les u_i sont tous dans $[\![1, N]\!]$, mais que $\max_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) \neq k$, alors $[T_n = k] \cap \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]$ est l'événement impossible, car si ω réalise cet événement, on a

  $$k = T_n(\omega) = \max(U_1(\omega), \ldots, U_n(\omega)) = \max(u_1, \ldots, u_n) \neq k,$$

  d'où une contradiction. Ainsi, la probabilité du numérateur est encore nulle.
- Si les u_i sont tous dans $[\![1, N]\!]$, et $\max_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) \neq k$, alors la réalisation de l'événement $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]$ entraîne celle de $[T_n = k]$, donc :

  $$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right)}{P(T_n = k)} = \frac{1}{k^n - k^{n-1}},$$

  d'après l'expression de la loi de T_n trouvée dans la première partie.

On en déduit que :

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si pour tout } i \text{ de } [\![1, n]\!],\ 1 \leqslant u_i \leqslant N \text{ et } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On pose, pour n entier de $\mathbb{N}^*$: $S_n = T_n + Z_n - 1$, et, pour tout k de $[\![1, N]\!]$:

$$\psi_n(k) = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}.$$

(a) S_n est défini à partir de l'échantillon i.i.d. $(U_1, \ldots, U_n)$ indépendamment de N, et prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus,

$$E(S_n) = E(T_n) + E(Z_n) - 1 = N - d_n(N) + 1 + d_n(N) - 1 = N,$$

d'après les questions I-3(b) et I-5. Ainsi, S_n est un estimateur sans biais de N.

(b) D'après la question II-3(b),

$$E(S_n \mid T_n = k) = E(Z_n \mid T_n = k) + E(T_n \mid T_n = k) - 1 = \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} + k - 1$$
$$= \frac{k^n + (k-1)k^n - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n-1}}{k^n - (k-1)^n} = \psi_n(k).$$

(c) Tout d'abord, $\psi_n(T_n)$ est défini en fonction des U_i indépendamment de N, et est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. C'est donc estimateur de N. De plus, d'après le théorème de transfert,

$$E(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} \psi_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(S_n \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(S_n) = N,$$

d'après la question précédente, le théorème de l'espérance totale et la valeur de $E(S_n)$ trouvée en IV-3(a).

Donc $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.

(d) On pose, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $\varphi_n(k) = E(S_n^2 \mid [T_n = k])$.

L'indication est ici totalement inutile et malvenue. On a déjà comparé $E(X^2)$ et $E(X)^2$, à l'aide de la formule de König-Huygens, formule aussi valable pour les espérances conditionnelles. Ainsi :

$$\psi_n^2(k) = E(S_n \mid T_n = k)^2 \leqslant E(S_n^2 \mid T_n = k) = \varphi_n(k).$$

On en déduit que

$$E(\psi_n(T_n)^2) = \sum_{k=1}^{n} \psi_n(k)^2 P(T_n = k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(S_n^2),$$

d'après la formule de l'espérance totale. Ainsi, puisque $E(\varphi_n(T_n)) = N = E(S_n)$, on déduit de la formule de König-Huygens que

$$V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n).$$

(e) On a :

$$V(S_n) = V(T_n + Z_n - 1) = V(T_n + Z_n) = V(T_n) + V(Z_n) + 2\mathrm{cov}(T_n, Z_n)$$
$$= V(T_n) + V(Z_n) + 2E(T_n Z_n) - 2E(T_n)E(Z_n).$$

Ainsi, d'après les questions I-3(c), I-4, I-3(b) et II-2(a), on obtient :

$$V(S_n) = 2(2N-1)d_n(N) - 4N d_{n+1}(N) - 2d_n^2(N) + 2N(1 + d_{n+1}(N)) - 2(N - d_n(N))(1 + d_n(N))$$
$$= 2N(d_n(N) - d_{n+1}(N))$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} V(S_n) = 0$. D'après la positivité de $V(\psi_n(T_n)$ et l'inégalité de la question précédente, on déduit du théorème d'encadrement que $V(\psi_n(T_n))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant P(|\psi_n(T_n) - N| \geqslant \varepsilon)) P(|\psi_n(T_n) - E(\psi_n(T_n))| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\psi_n(T_n))}{\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de N.

4. Soit, pour n entier de $\mathbb{N}^*$, un estimateur sans biais R_n du paramètre N.
On pose, pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $f_n(k) = E(R_n \mid [T_n = k])$

(a) Tout d'abord, on montre que $f_n(T_n)$ est aussi sans biais, en utilisant le théorème de transfert et la formule de l'espérance totale :

$$E(f_n(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} f_n(k) P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(R_n \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(R_n) = N.$$

On a, en utilisant la même inégalité que précédemment sur les espérances, et en utilisant le théorème de transfert puis la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} E(f_n(T_n)^2) &= \sum_{k=1}^{N} f_n(k)^2 P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(R_n \mid T_n = k)^2 P(T_n = k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N} E(R_n^2 \mid T_n = k) P(T_n = k) = E(R_n^2). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$V(f_n(T_n)) = E(f_n(T_n)^2) - E(f_n(T_n))^2 = E(f_n(T_n)^2) - N^2 \leqslant E(R_n^2) - E(R_n)^2 = V(R_n).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- Supposons que pour tout N de $\mathbb{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$.
  Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F(k) = \psi_n(k)$.
  Pour $N = 1$, les U_i prennent la valeur constante égale à 1, et donc T_n est la variable constante égale à 1, donc $F(T_n)$ est la variable constante de valeur $F(1)$. Par conséquent, $1 = N = E(F(T_n)) = F(1)$. Or,

  $$\psi_n(1) = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{1^n - 0^n} = 1 = F(1).$$

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifiée.
  Soit $k \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(i)$ soit vérifié pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$. Alors, en utilisant l'hypothèse pour la valeur $N = k$, et les hypothèses de récurrence, on obtient :

  $$N = k = \sum_{i=1}^{k} F(i) P(T_n = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \psi_n(i) P(T_n = i) + F(k) P(T_n = k).$$

  Or, d'après IV-3(c), $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de $N = k$, donc, d'après le théorème de transfert :

  $$k = \sum_{i=1}^{k} \psi_n(i) P(T_n = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \psi_n(i) P(T_n = i) + \psi_n(k) P(T_n = k).$$

  Ainsi, on obtient :

  $$k = \sum_{i=1}^{k-1} \psi_n(i) P(T_n = i) + \psi_n(k) P(T_n = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \psi_n(i) P(T_n = i) + F(k) P(T_n = k),$$

  d'où on déduit que :

  $$\psi_n(k) P(T_n = k) = F(k) P(T_n = k) \qquad \text{puis:} \qquad \psi_n(k) = F(k),$$

  puisque $P(T_n = k) \neq 0$, lorsque $N = k$ (vois loi de T_n). Donc $\mathcal{P}(k)$ est vérifié
  Ainsi, d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- La réciproque provient du fait que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.

(c) Soit R un estimateur sans biais de N, et f_n comme plus haut. Alors, on a montré que $E(f_n(T_n)) = N$. Cela est vrai pour tout N. De plus, f_n ne dépend pas de N. En effet,

$$f_n(k) = E(R_n \mid T_n = k),$$

et comme dans la condition, on suppose que la valeur maximale atteinte est k, et que les autres valeurs sont équiprobables, cette expression est la même quelle que soit la valeur de N (supérieure à k). On peut donc utiliser la question précédente, qui nous assure que $f_n = \psi_n$. Ainsi, la question IV-4(a) amène :

$$V(\psi_n(T_n)) = V(f_n(T_n)) \leqslant V(R_n),$$

donc $\psi_n(T_n)$ est bien l'estimateur sans biais de N de variance minimale.