Lycée La Bruyère, Versailles — Mercredi 2 septembre 2009
ECS 2 – Mathématiques

Interrogation n° 1 – Révisions du programme de 1ère année
(1 heure)

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

2. Théorème des accroissements finis.
Soit a, b deux réels tels que $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

3. Soit $\alpha < \beta$ et $a < b$ quatre réels. Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\ \mathrm{d}t.$$

4. (a) Le terme général $n\left(\sin \frac{1}{n}\right)^3$ est positif pour n assez grand, et

$$n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^3 \underset{+\infty}{\sim} n\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison des séries positives de terme général équivalent, on en déduit que $\sum n\left(\sin\frac{1}{n}\right)^3$ converge.

(b) La suite $(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive. De plus d'après les règles de croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}^4\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = 0, \qquad \text{donc:} \qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (série de Riemann de paramètre 2), et à termes positifs. Donc, d'après la règle de comparaison des séries à termes positifs par o, $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ est convergente.

5. **Définition :** Une fonction convexe sur un intervalle I est une fonction dont l'épigraphe est convexe.
Caractérisation 1 : Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si les cordes sont au-dessus de la courbe, donc si et seulement si pour tout couple (a, b) d'éléments de I tel que $a < b$, on a :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Caractérisation 2 : Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I et que les tangentes à gauche et à droite de la courbe en tout point sont sous la courbe.
Caractérisation 3 (pour les fonctions dérivables) : Une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.
Caractérisation 4 (pour les fonctions deux fois dérivables) : Une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle I est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I.

6. **Définition :** Soit P un polynôme à coefficients réels, et $r \in \mathbb{R}$. On dit que r est une racine de P d'ordre de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $(X - r)^\alpha$ divise P et $(X - r)^{\alpha+1}$ ne divise pas P. Par extension et par commodité, on parle parfois d'une racine de multiplicité 0 pour un réel qui n'est pas racine de P.
Caractérisation par les dérivées : Le réel r est racine d'ordre de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de P si et seulement si :

$$\forall k \in [\![0, \alpha - 1]\!], \quad P^{(k)}(r) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(\alpha)}(r) \neq 0.$$

7. Comme souvent pour les sommes faisant intervenir des fonctions trigonométriques, on introduit l'exponentielle complexe, afin d'essayer de se ramener à un terme géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\alpha k} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{\alpha})^k = \operatorname{Im}(1 + \mathrm{e}^{\alpha})^n,$$

d'après la formule du binôme. En factorisant par la moitié de l'angle, il vient donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha) &= \operatorname{Im} \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\alpha n}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}})^n\right] = \operatorname{Im} \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\alpha n}(2\cos\frac{\alpha}{2})^n\right] \\ &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\alpha n} = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \operatorname{Im} \sin\left(n \cdot \frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

8. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (noté $\mathbb{K}$). L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de F si et seulement si :
   - $E \subset F$,
   - $E \neq \varnothing$,
   - E est stable par combinaison linéaire (pour la loi de F), c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in E.$$

9. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et f une application de E vers F. On dit que f est une application linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

10. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est :
    - libre si et seulement :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k = 0;$$

    - génératrice de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k;$$

    - une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.
11. Notons f l'endomorphisme correspondant.
    - L'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice canoniquement associée. Ainsi :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right).$$

    Or, $\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right).$$

    Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Im}(f)$.

- On rappelle que si A est une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$, alors

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n.$$

En particulier, si $x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est dans le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A. Or, ici, la relation entre les colonnes exprimée dans l'étude de l'image de f s'exprime $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de l'image. De plus, la formule du rang amène immédiatement

$$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

12. - On a une formule toute faite pour l'inversion des matrices 2×2, à l'aide du déterminant. Pensez-y (et apprenez-la), c'est tout de même plus rapide que toutes les méthodes calculatoires (pivot de Gauss ou autre). D'autant qu'ici, je m'étais arrangé pour avoir des coefficients un peu délicats dans le résultat... On a donc : $\det M_1 = 2 \times 7 + 1 \times 5 = 19 \neq 0$. Ainsi, M_1 est bien inversible, et

$$M_1^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vous pouvez faire une rapide vérification (ce n'est jamais inutile) en effectuant le produit de M_1 par la matrice que vous avez obtenue.

- Pour une matrice 3×3, on utilise la méthode du pivot de Gauss : on se ramène à la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes, et on effectue les mêmes opérations sur les lignes de la matrice identité.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, M_2 est inversible et $M_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Encore une fois, n'oubliez pas de faire une vérification rapide !

13. Le scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, donc si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$ Or :

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Ainsi, $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 3\}$.

La matrice A, d'ordre 2, admettant 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et ses espaces propres sont de dimension 1.

- L'espace propre E_{-1} : on a $A+I_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$. Les colonnes de $A+I_2$ vérifient : $C_1-C_2=0$, ainsi, comme dans une question précédente, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $A+I_2$, donc dans E_{-1}. Comme E_{-1} est de dimension 1, on en déduit que $E_{-1}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
- L'espace propre E_3 : on a $A-3I_2=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}$. Les colonnes de $A+I_2$ vérifient : $C_1+C_2=0$, ainsi $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est dans E_3. Comme E_3 est de dimension 1, on en déduit que $E_3=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de diagonalisation de l'endomorphisme canoniquement associé à A, et la formule de changement de base fournit la relation $A=PDP^{-1}$, où :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

14. Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet **dénombrable** d'événements (ou quasi-complet), et B un événement. Alors

$$P(B)=\sum_{i\in I}P_{A_i}(B)P(A_i).$$

15. Avec la correction $n\in\mathbb{N}^*$, les différents termes de l'énoncé sont positifs. Il suffit donc que leur somme soit convergente, et égale à 1. La convergence est assurée par l'équivalence

$$(n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

terme général d'une série convergente positive (série du binôme négatif, dérivée seconde de la série géométrique). En essayant de se ramener à ces séries du binôme négatif grâce à une décomposition judicieuse de la partie polynomiale, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=8-2-1=5.\end{aligned}$$

Ainsi, il faut et il suffit de choisir $a=\frac{1}{5}$.
L'espérance de X existe si et seulement si la série de terme général $nP(X=n)$ converge absolument. Or

$$nP(X=n)=n(n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Les séries étant à termes positifs, et le dernier membre étant, à un facteur $\frac{1}{4}$ près, le terme général d'une série du binôme négatif convergente, la série $\sum nP(X=n)$ est absolument convergente, d'où l'existence de l'espérance de X. De plus,

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{4}\frac{3!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4}=24.$$

16. Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance σ^2. Alors, pour tout $\varepsilon>0$,

$$P(|X-m|>\varepsilon)<\frac{\sigma^2}{\varepsilon}.$$