Interrogation n° 2 (40 minutes)
Suites, séries, intégrales, DL, intégrales impropres

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite lorsque x tend vers b. Dans ce cas,
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est faussement impropre si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$ (c'est-à-dire si f admet une limite finie en b).
Preuve.
Soit g le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$. La fonction g étant continue sur $[a, b]$, elle admet une primitive G sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b[$, on a $G'(x) = g(x) = f(x)$. Ainsi, G est une primitive de f sur $[a, b[$. On a donc,
$$\forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = G(x) - G(a),$$
et par conséquent, G étant continue en b, cette expression admet une limite lorsque x tend vers b, d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

3. Nature des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}$
   La série n'était évidemment définie que pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln n = o(n)$, donc
   $$n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o(n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}})$$
   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-y} = o\left(\frac{1}{y^8}\right)$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right)$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Ainsi :
   $$n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), $\sum n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}$ est absolument convergente, donc convergente.
   (b) Si $a = 0$, la série est grossièrement divergente.
   Si $a > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = 0$. Ainsi :
   $$\cos\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^2}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$
   Or, $\displaystyle\sum \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ (série de Riemann). Comme la série $\displaystyle\sum -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est à termes positifs, d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries, il en résulte que $\displaystyle\sum \cos\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

4. On a, au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{2n^2 + n - 1}{4^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2(n+1)(n+2)}{4^n}.$$
Ces séries étant à termes positifs, la série $\displaystyle\sum \frac{2n^2 + n - 1}{4^n}$ est de même nature que $\sum 2(n+1)(n+2)4^n$. Il s'agit d'une série du binôme négatif (série dérivée seconde de la série géométrique). Ainsi, son paramètre étant $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$, elle est convergente.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2n^2 + n - 1 = 2(n+1)(n+2) - 5n - 5 = 2(n+1)(n+2) - 5(n+1).$$
Ainsi, toutes les séries étant convergentes, et d'après les formules des séries dérivées des séries géométriques (formules du binôme négatif), on obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{4^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{4^n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4^4}{3^3} - \frac{80}{3^2} = \frac{256 - 240}{27} = \frac{16}{27}.$$

5. (a) Posons le changement de variables $t = \ln x = \varphi(x)$, $x \in [1,2]$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$, et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
Ainsi
$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x+\ln^2 x)(2+\ln x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{(1+t+t^2)(2+t)}.$$
Cherchons des réels a, b et c tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
$$\frac{1}{(1+t+t^2)(2+t)} = \frac{at+b}{1+t+t^2} + \frac{c}{2+t} = \frac{(at+b)(2+t)+c(1+t+t^2)}{(1+t+t^2)(2+t)} = \frac{(a+c)t^2+(2a+b+c)t+(2b+c)}{(1+t+t^2)(2+t)}.$$
Par identification polynomiale du numérateur, l'identité étant vraie pour une infinité de valeurs,
$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a+b+c=0 \\ 2b+c-1=0 \end{cases}$$
On obtient $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. Ainsi,
$$I = -\frac{1}{3}\int_0^{\ln 2} \frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t.$$
Or,
$$\begin{aligned} J = \int_0^{\ln 2}\frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\ln 2}\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int_0^{\ln 2}\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_0^{\ln 2} - 2\int_0^{\ln 2}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln(\ln^2 2+\ln 2+1) - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(\ln 2+\frac{1}{2})}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(\ln^2 2+\ln 2+1) - \sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(\ln^2 2+\ln 2+1) - \sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$
Ainsi,
$$I = \frac{1}{6}\ln(\ln^2 2+\ln 2+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}\big(\ln(2+\ln 2) - \ln 2\big).$$

(b) Commençons par faire le changement de variables $t = \frac{1}{x^2}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration.
Alors, $\mathrm{d}t = -\dfrac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$, d'où
$$\int_{\frac{36}{\pi^2}}^{\frac{9}{\pi^2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\cos^2\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}\int_{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}\frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{2}\Big[\tan t\Big]_{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4} = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^4\right) - \tan\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\right)\right)$$

6. Attention lors des compositions de DL à bien utiliser des fonctions de limite nulle. On a, au voisinage de 0 :
$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)+o(x^2) = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$
On a alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{1}{2+x}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = \sqrt{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\ &= \sqrt{\mathrm{e}}\left(1+\left(-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right) = \sqrt{\mathrm{e}}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2\right)+o(x^2) \end{aligned}$$