

Correction de Interrogation

1. La forme bilinéaire φ est symétrique puisque sa matrice M dans la base canonique est symétrique. Soit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$\begin{aligned} \varphi(X, X) &= x^2 + 2y^2 + 9z^2 + 6t^2 - 2xy - 2xz + 2xt - 2yz - 4yt - 2zt \\ &= (x - y - z + t)^2 + y^2 + 8z^2 + 5t^2 - 4yz - 2yt \\ &= (x - y - z + t)^2 + (y - 2z - t)^2 + 4z^2 + 4t^2 - 4zt \\ &= (x - y - z + t)^2 + (y - 2z - t)^2 + (2z - t)^2 + 3t^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, φ est positive. De plus, $\varphi(X, X)$ est nul si et seulement si chaque carré est nul (cas c'est une somme de termes positifs), donc si et seulement si :

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \\ 2z - t = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

donc si et seulement si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, φ est définie.

Par conséquent, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, il s'agit donc d'un produit scalaire.

2. voir cours
3. voir cours
4. voir cours
5. voir cours
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_4) < 4$. Déterminons ce rang à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_4 &= \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\lambda \\ 2 & 3-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftrightarrow L_1 \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 2+2\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2+2\lambda & -1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_1 \end{array} \\ &\longrightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 2+2\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda-4) \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 - L_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{-1, 4\}$ De plus :

- $\text{rg}(A + I_4) = \text{rg}(A_{-1}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ donc E_{-1} est de dimension 3, d'après le théorème du

rang. De plus, pour tout X de $\mathbb{R}^4$, $(A + I_4)X = 0 \iff A_{-1}X = 0$, donc on trouve une base de E_{-1} en résolvant le système associé à A_{-1} . Les colonnes de A_{-1} vérifient les relations :

$$2C_1 - C_2 = 0 \quad C_1 + C_3 = 0 \quad \text{et} \quad C_1 - C_4 = 0.$$

Ainsi, les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans E_3 , et forment une famille libre (car ils sont échelonnés). Donc comme $\dim E_3 = 3$, ils forment une base de E_3 .

- De même, $\text{rg}(A - 4I_4) = \text{rg}(A_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$, donc $\dim E_4 = 1$.

De plus, les colonnes de cette matrice vérifient $2C_2 + C_4 + C_3 + C_1 = 0$, donc $E_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $A = PDP^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$