Lycée La Bruyère, Versailles — Lundi 18 janvier 2010

ECS 2 – Mathématiques

Interrogation n° 3 – Algèbre bilinéaire

1. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

2. L'endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique q est l'unique endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle .$$

3. Soit u un endomorphisme symétrique, et λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, dont les espaces propres associés sont E_λ et E_μ. Alors :
$$\forall (x, y) \in E_\lambda \times E_\mu, \quad \lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu \langle x, y\rangle ,$$
et comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda \perp E_\mu$.

4. Les vecteurs $e_1 = (0, 1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 1, 0, 0)$ étant non colinéaires (et en nombre 2), ils forment une famille libre. Ainsi, ils forment une base de l'espace F qu'ils engendrent. Déterminons une base orthonormale (f_1, f_2) de F, obtenue de (e_1, e_2) par le procédé de Schmidt. On a :
$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, 2), \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|},$$
où :
$$u_2 = e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1 = (-1, 1, 0, 0) - \frac{1}{6}(0, 1, 1, 2) = \frac{1}{6}(-6, 5, -1, -2), \qquad \text{donc:} \qquad \|u_2\|^2 = \frac{1}{36}(36 + 25 + 1 + 4) = \frac{66}{36}.$$
Ainsi
$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-6, 5, -1, -2).$$
Le projeté orthogonal de A sur F est donc donné par la formule :
$$p_F(A) = \langle A, f_1\rangle f_1 + \langle A, f_2\rangle f_2 = \frac{2}{3}(0, 1, 1, 2) + \frac{1}{33}(-6, 5, -1, -2) = \frac{1}{33}(-6, 27, 21, 42) = \frac{1}{11}(-2, 9, 7, 14).$$
Ainsi,
$$d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \frac{1}{11}\left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{11}\left\| \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{11}\sqrt{169 + 169 + 49 + 9} = \frac{\sqrt{296}}{11} = \frac{2\sqrt{74}}{11}.$$

5. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable.
Soit $\lambda \in RR$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_4$ est de rang inférieur ou égal à 3. Déterminons ce rang par la méthode du pivot de Gauss :
$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftrightarrow L_1$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)L_1 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & -\lambda & -2\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 - L_3$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -7\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Cette matrice triangulaire est de rang au plus 3 si et seulement si au moins un terme de sa diagonale est nulle, donc si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 7$.

La matrice M_0 est de rang 1, donc E_0 est de dimension 3. Or, les colonnes de A vérifient $2C_1 - C_2 = 0$, $C_3 - C_4 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (2, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, -1)$ et $e_3 = (1, 0, 1, 0)$ sont dans E_0, et libres (échelonnés par rapport à leur dernière coordonnée non nulle). Par conséquent, la dimension de E_0 étant 3, ils forment une base de E_0. De plus, les deux premiers sont orthogonaux, ce qui nous facilitera la tâche d'orthonormalisation. Soit (f_1, f_2, f_3) la b.o.n. obtenue de (e_1, e_2, e_3) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On a, puisque $e_1 \perp e_2$,

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1).$$

Alors,

$$f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \qquad \text{où} \qquad u_3 = e_3 - \langle e_3, f_1 \rangle f_1 - \langle e_3, f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{10}(2, 4, 5, 5).$$

On obtient donc :

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(2, 4, 5, 5).$$

Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n. de E_0.

La matrice M_7 vaut $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 3, et ses colonnes vérifient :

$$C_4 + C_3 - 2C_2 - C_1 = 0,$$

donc $E_7 = \mathbb{R}(-1, -2, 1, 1)$. Un vecteur unitaire de E_7 est donc $f_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, -2, 1, 1)$.

Puisque A est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc (f_1, f_2, f_3, f_4) est une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$. Soit P la matrice de passage de la base canonique dans cette *b.o.n.*. On a donc

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{70}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Puisque P est la matrice de passage entre 2 bases orthonormales, P est une matrice orthogonale, et on obtient donc finalement

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Remarquez que 7 est le carré de la norme de la première colonne, et que le vecteur propre trouvé est (à un coefficient près) la première colonne de A. Cela n'est pas anodin, c'est le cas pour toute matrice symétrique de rang 1. Pourquoi ?

6. Soit $y = mx + p$ l'équation de la droite de régression de y en x. Ainsi, m et p minimisent l'expression :

$$(2 - m - p)^2 + (-1 - p)^2 + (2 - 2m - p)^2 + (-2 + m - p)^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 - m - p \\ -1 - p \\ 2 - 2m - p \\ -2 + m - p \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Ainsi, le couple (m, p) minimise l'expression $\|AX - B\|$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème des moindres carrés, cette expression atteint son minimum en une valeur (m, p) solution de l'équation ${}^tAA \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = {}^tAB$. Ainsi, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 6m + 2p & = & 8 \\ 2m + 4p & = & 1 \end{cases}$$

Ainsi, $m = \frac{3}{2}$ et $p = -\frac{1}{2}$.

La droite de régression de y en x est donc la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.