Devoir Surveillé n° 1 (4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 –

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p^n. On suppose que les X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$, et $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

1. (a) Soit X et Y deux variables aléatoires admettant des variances. Rappeler la relation existant entre $V(X+Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.

   (b) En déduire que pour tout n-uplet $(T_1, \dots, T_n)$ de variables aléatoires admettant des variances,
$$V\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{cov}(T_i, T_j).$$

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

3. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Z_n.

4. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi et l'espérance de $Y_n Y_{n+1}$.

   (b) Déterminer, pour tout couple (k, ℓ) d'entiers strictement positifs, $\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell)$.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variance de Z_n.

Exercice 2 – (D'après ESCP-EAP 2002 Math III, option Eco)

On désigne par I, 0, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire la matrice A comme combinaison linéaire des matrices I et J, puis la matrice J comme combinaison linéaire des matrices A et I.
   (b) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire que la matrice A vérifie l'égalité $A^2 + 5A + 4I = 0$.
   (c) Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des matrices I et J.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de J et déterminer les espaces propres associés (en donner une base)
   (b) La matrice J est-elle inversible ? La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. (a) Déduire de la question précédente que A est diagonalisable. Donner explicitement une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Sans expliciter A^{-1}, calculer ses valeurs propres et montrer qu'elle est diagonalisable.
4. Calcul de $A^n, n \in \mathbb{N}$, par trois méthodes différentes.
   (a) En exploitant la question précédente, calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on donnera le résultat sous forme d'une matrice).
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n en fonction de J, puis retrouver l'expression de A^n en utilisant la relation donnant A en fonction de I et J
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 5X + 4$. Retrouver à l'aide de ce résultat l'expression de A^n.
5. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel le gradient de F_a est nul. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.
   (c) Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre

$$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2,$$

   et préciser son signe.
   (d) En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur, notée $M(a)$.
   (e) Montrer que la fonction M qui, à tout réel a, associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera.
   (f) Que peut-on en conclure pour les maxima de la fonction de 3 variables f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Problème – (extrait et adapté de ESSEC 1993)

L'objet de ce problème, développé dans la partie III, est l'obtention de valeurs approchées de π.

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel, et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1. On notera aussi, pour simplifier les écritures : $b = a^2 + 1$.

Partie I – Étude d'intégrales

1. *On désigne par p et q des entiers naturels, et l'on étudie l'intégrale $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q \ \mathrm{d}t$.*
   (a) On suppose que $q \geqslant 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$.
   (b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p,q)$, et en particulier celle de l'intégrale $I(p,p)$, que l'on notera $J(p)$ dans la suite du problème.
   (c) En étudiant le maximum sur $[0,1]$ de $t \mapsto t^2(1-t^2)$, établir que l'on a $0 \leqslant J(p) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^p$.
2. *On étudie dans cette question l'intégrale : $f(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.*
   (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Établir, pour $a \neq 1$, l'égalité suivante (on pourra utiliser un changement de variable $t = \dfrac{ax-1}{x+a}$) :
   $$f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1). \qquad (1)$$
   (c) Établir que $f(a) = a\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$.

Partie II – Étude d'une suite de polynômes

On considère les polynômes définis par : $P_n = 1 + \lambda_n X^n(1-X)^n$.

1. Déterminer le nombre λ_n pour que $-a^2$ soit racine de P_n.

On supposera λ_n ainsi choisi dans toute la suite du problème. On désignera alors par Q_n le polynôme défini par $P_n = (X+a^2)Q_n$.

2. (a) Expliciter Q_0 et Q_1.
   (b) En considérant $P_{n+1} - P_n$, établir la formule suivante :
   $$Q_{n+1} - Q_n = \left(-\frac{X(1-X)}{a^2b}\right)^n Q_1. \qquad (2)$$

Partie III – Détermination de valeurs approchées de π

1. **Une première approximation de π**
   On pose : $u_n(a) = a\displaystyle\int_0^1 Q_n(t^2) \ \mathrm{d}t$.
   (a) Calculer $u_1(a)$.
   (b) En remarquant que $u_2(a) = a\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(t^2)\ \mathrm{d}t}{a^2+t^2}$, montrer que : $u_2(a) + \dfrac{J(2)}{a^3b^3} \leqslant f(a) \leqslant u_2(a) + \dfrac{J(2)}{a^5b^2}$.
   (c) Montrer que $4(u_2(2) + u_2(3))$ donne une valeur approchée de π à 10^{-3} près.
2. **Une approximation plus fine**
   (a) Établir l'inégalité suivante :
   $$|u_n(a) - f(a)| \leqslant \frac{1}{(4a^2b)^n a}. \qquad (3)$$

(b) Justifier que $4(u_5(2)+u_5(3))$ est une valeur approchée de π à 10^{-8} près.

3. **Programmation**

(a) Établir à l'aide de l'égalité (2) que : $u_{n+1}(a)-u_n(a)=\dfrac{(-1)^n aJ(n)}{(a^2b)^{n+1}}\cdot\dfrac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3}$.

(b) On pose $v_n(a)=u_{n+1}(a)-u_n(a)$. Exprimer pour tout $n\geqslant 1$ le rapport $\dfrac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ en fonction de n, de a et de b.

(c) On donne un entier naturel n et un nombre réel a supérieur à 1. Rédiger en PASCAL :

- une fonction prenant en paramètre n et a, et effectuant le calcul de $v_n(a)$, en utilisant la relation de récurrence de la question précédente ;
- une fonction prenant en paramètre n et a, et effectuant le calcul de $u_n(a)$ (on exprimera $u_n(a)$ en fonction de $u_1(a)$ et des $v_k(a)$, $1\leqslant k\leqslant n$) ;
- un corps de programme affichant une valeur approchée de π à 10^{-8} près (sans se servir bien entendu de la constante `pi` connue par Pascal !)