Devoir Surveillé n° 2 (4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (Exercice technique)

1. **Séries numériques**
   (a) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}}-\mathrm{e}\right)$
   (b) Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}$
   (c) Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^3}{3^n}$
2. **Développements limités**
   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+\cos x)}$
   (b) En calculant des développements limités à l'ordre 3 de $\tan x$ et $\operatorname{Arctan} x$, montrer que
   $$\ln(\operatorname{Arctan} x)-\ln(\tan x)\underset{0}{\sim}-\frac{2}{3}x^2.$$
3. **Intégrales**
   (a) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}(\ln x)^{-\ln x}\,\mathrm{d}x$?
   (b) Justifier la convergence, et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.
   On pourra faire un changement de variables $t=\mathrm{e}^x$.

(c) On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

i. Déterminer, en fonction de sh et ch, les dérivées des fonctions sh, ch et th.

ii. Quelles sont les variations de sh ? Déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

iii. Quelles sont les variations de th ? Déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

iv. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

v. Après avoir montré sa convergence, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
On pourra pour cela faire un changement de variables $y = \mathrm{sh}x$.

Exercice 2 – (Écricome 2007)

1. À l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(2 - \mathrm{e}^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[.$$

(b) En déduire le signe de $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

(c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$?

(d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) \qquad \text{et} \qquad u_n = \exp V_n.$$

Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} V_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

3. (a) Montrer que $\ln(nu_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$.

(b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

(c) En déduire que u_n est équivalent, quand k tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$, avec $K > 0$.
Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$.

(a) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

(b) Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

(c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

(d) Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre un réel e, et donnant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n u_n$ à la marge d'erreur e près.
On pourra justifier que l'erreur faite au rang n est majorée par u_n.

Problème – (d'après EM Lyon 2006)

Partie I – Préliminaires

1. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\, dt$ converge.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$.

3. Rappeler sans calcul la valeur de I_0. Calculer I_1.
4. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
5. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$
6. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.
7. Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre une valeur n, et calculant I_n. On privilégiera la relation de récurrence à la formule explicite.

Partie II – Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\, dt$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *les applications définies, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par :*

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\, dt.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.
   On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange
3. (a) Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   (b) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$.

   (b) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt$.

   (c) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}$ et $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt$.

Partie III – Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\, dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par :* $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\, dt$.

2. (a) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$: $0 \leqslant (1-u+u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\, dt - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Partie IV – Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.
   En déduire que la série de terme général u_p est convergente.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_p x^p$, $x \in \mathbb{R}$.