Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3 (4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (d'après EM Lyon 2005 option Eco) – **temps idéal : 40 minutes**
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leqslant 0 \\ \frac{1}{(t+1)^2} & si\ t > 0. \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f, et tracer l'allure de sa courbe représentative.
2. Montrer que f est une densité de probabilité
3. Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et calculer cette intégrale.
4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé. On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.

   (b) Montrer que φ_x est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

   (c) Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue u admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

   On note $U : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui à tout réel $x \in [0, +\infty[$ associe $U(x)$, l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

6. (a) Vérifier, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$: $U(x) = 1 - x$

   (b) Vérifier, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$: $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

7. (a) Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.

   (b) Étudier la dérivabilité de U. Déterminer les demi-tangentes à gauche et à droite en $\frac{1}{2}$.

   (c) Montrer que la courbe de U présente une asymptote en $+\infty$. Déterminer une équation de cette asymptote, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

   (d) Étudier la convexité de U sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2 – **temps idéal : 1h**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

On note, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que $\mathcal{B} = (b_0, \ldots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de E ?
2. (a) Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice A de D relativement à la base $\mathcal{B}$
   (c) L'endomorphisme D est-il un isomorphisme ? Est-il diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants.
3. *Soit $B = A - I_{n+1}$, où I_{n+1} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et soit f l'endomorphisme associé à la matrice B relativement à la base $\mathcal{B}$.*
   (a) Déterminer en fonction des b_i l'expression de $f(b_j)$, $j \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$
   (d) En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Déterminer à l'aide de la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de la fonction b_n. Retrouver ce résultat directement à l'aide d'une formule du cours.
4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 5$.**
   (a) Déterminer A^{-1}.
   (b) En déduire une primitive de la fonction b_5.
   (c) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. Quel résultat classique retrouve-t-on ?
5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de D est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – (Ecricome 1999) – **temps idéal : 50 minutes**

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés. M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n

2. *Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}, \text{ avec } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3},$$

et :

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}, \text{ avec } \quad C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad \text{et } A' = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}.$$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix}, \text{ où } C'' = C + AC'.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}, \text{ où } V \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Calcul de V^n**
   On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3. Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n
5. **Calcul de U_n**
   (a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.
   Calculer $M^n X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5(a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Problème – Étude du nombre de racines de certains polynômes à coefficients aléatoires

temps idéal : 1h30 à 2h – Ne laissez pas le problème pour la fin

Partie I – Cas d'un polynôme de degré 2 (extrait de ESCP/EAP 2006)

On considère dans cette partie deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega = y^2 + X_1(\omega) y + X_0(\omega).$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui à tout ω de Ω associe $M(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.
   (a) Déterminer la loi de X_0
   (b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose :

$$Y_0 = -4X_0, \qquad Y_1 = X_1^2 \qquad \text{et} \qquad Y = Y_1 + Y_0.$$

On note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout réel x :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{x}{8}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4} + \sqrt{t}\right)\right),$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

(a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$

(b) En déduie qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout réel x, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

5. On désigne par Φ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t.$$

(a) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$? En déduire l'expression de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ en fonction de $\Phi(x)$.

(b) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$.

(c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = 4\sqrt{\mathrm{e}} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} \mathrm{d}v$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

(d) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}}\left(1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)\right)$.

(e) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II – Cas d'un polynôme de degré 3

On considère dans cette partie deux variables aléatoires réelles X_2 et X_3 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant respectivement une loi uniforme sur $[-1, 1]$ et une loi uniforme sur $]0, 1]$ (ainsi, X_3 ne peut pas prendre la valeur 0)

Pour tout ωdeΩ, on considère le polynôme R_ω d'indéterminée y, défini par :

$$R_\omega = y^3 + X_2(\omega)y^2 + X_3(\omega).$$

On désigne par $N(\omega)$ le nombre de racines réelles de R_ω.

1. Justifier que $N(\Omega) = \{1, 2, 3\}$
2. En étudiant les variations de la fonction polynomiale R_ω, montrer que $N(\omega) = 2$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) = 0$, et que $N(\omega) = 3$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) < 0$
3. Déterminer la fonction de répartition de $\dfrac{4}{27}X_2^3$, et jusitifier qu'il s'agit d'une variable à densité. En déterminer une densité
4. Justifier que $Z = \dfrac{4}{27}X_2^3 + X_3$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
5. Justifier que $P(N = 2) = 0$, et déterminer la loi de N, ainsi que son espérance.