Concours Blanc n° 1 – Épreuve 1 (DS 4 – 4 heures)
Épreuve de type « EDHEC »

À l'exception des élèves mentionnés en entête de chaque sujet, les élèves ont le choix entre l'épreuve de type « Parisiennes » et l'épreuve de type « EDHEC ». Ils ne devront traiter qu'une des deux épreuves.

Avertissement : Cette épreuve est obligatoire pour Pincebourde, Azak, Meyrignac, Zlobina, Jurain, Ducongé, Flamant, Gibard, Engel, Briga

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (EDHEC 2006)

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^m$, et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant $(f - \lambda_1 \text{id}) \circ (f - \lambda_2 \text{id}) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

1. (a) Vérifier que $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \text{id}) - (f - \lambda_2 \text{id})) = \text{id}$.
- (b) En déduire que $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$.
- (c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas)

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.
3. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.
 - (a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.
 - (b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.
On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associées aux valeurs propres i et $-i$.
Montrer que $X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}$.
 - (c) En déduire que si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E_i , alors $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i} .
Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.
 - (d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 2 – (EDHEC 1997)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.

On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1. Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. (a) Montrer que $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$
 (b) Montrer que $\dim \text{Im } g \leq 2$
 (c) Dédire des questions précédentes que $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq 2$.
 (d) Conclure que $g \circ f$ n'est ni surjective ni injective.
3. En déduire une valeur propre de BA .

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.
 (a) Montrer que $BX \neq 0$
 (b) Montrer que si λ est valeur propre de AB , alors λ est valeur propre de BA .
 (c) En déduire que BA est diagonalisable.

Exercice 3 – (Extrait de ESCP 1999)

Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k , on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k . À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de $2n + 1$ réel, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante :

- pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, avec :

$$A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^n b_j X^j,$$

on pose : $\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j s_{i+j};$

- pour tout polynôme C élément de E_{2n} , avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose : $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$.

1. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.
 (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément $(A, B) \in E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$.
 (On commencera par considérer le cas où $A = X^i$ et $B = X^j$, avec $0 \leq i, j \leq n$).

2. Deux cas particuliers

- (a) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2).$$

En déduire une condition nécessaire portant sur les réels s_1 et s_2 , pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

- (b) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$, et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2 , associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

Problème – (EDHEC 2000)

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire noté $\langle -, - \rangle$, défini par :

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall u' = (x', y', z'), \quad \langle u, u' \rangle = xx' + yy' + zz'.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.

Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$, ainsi qu'un réel a , tels que : pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on ait $\langle u_i, u_j \rangle = a$.

La partie I permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie II étudie les propriétés d'une telle famille et la partie III propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n , mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

Partie I –

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel a , on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à 1, les autres étant égaux à a . On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- (a) Montrer sans calcul que J est diagonalisable.
(b) Calculer J^2 et en déduire les deux valeurs propres de J
- (a) Utiliser une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les valeurs propres de M_a .
(b) En déduire que M_a est inversible si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$.
- (Question ne figurant pas dans le sujet original)

- (a) Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base du sous-espace propre E_0 de J associé à la valeur propre 0.
(b) En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base, déterminer une base orthonormale (b_1, b_2, b_3) de E_0 .
(c) Justifier qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de J , et donner explicitement une telle base en fonction de b_1, b_2, b_3 et d'un vecteur propre associée à la deuxième valeur propre de J .

Partie II –

On suppose qu'on a trouvé une famille $(u_1, \dots, u_n)$ formée de n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, et un réel a , solutions du problème.

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$.

- (a) Montrer que $M_a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.

- (b) En déduire la valeur maximale de n lorsque $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$.

2. **Étude du cas $a = 1$**

- (a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j (avec $i \neq j$).
À quelle condition a-t-on égalité?
 - (b) En déduire que $n = 1$.
3. Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4) formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.
- (a) Donner la valeur de a .
 - (b) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

Partie III –

- 1. Donner une famille solution du problème pour $n = 3$ et $a = 0$.
- 2. On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$.
 - (a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé avec $a = -\frac{1}{2}$.
 - (b) Trouver deux réels λ et μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.