Concours Blanc n° 1 – Épreuve 1 (DS 4 – 4 heures)
Épreuve de type « Parisiennes »

À l'exception des élèves mentionnés en entête de chaque sujet, les élèves ont le choix entre l'épreuve de type « Parisiennes » et l'épreuve de type « EDHEC ». Ils ne devront traiter qu'une des deux épreuves.

Avertissement : Cette épreuve est obligatoire pour Michel, Caron, Barbier, Tabath, de Mareuil, Pottier, Clerbois, Corbel, Weides, Frapsauce

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème – ***(ESCP 1999)***

Dans tout le problème, l'espérance d'une variable aléatoire sera notée $E(Y)$. Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.
Pour tout entier naturel k, on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k. À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n+1$ réel, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante : pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, avec :

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad \textit{et} \qquad B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j,$$

on pose :

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_i b_j s_{i+j},$$

et pour tout polynôme C élément de E_{2n}, avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose :

$$S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i.$$

1. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément $(A, B) \in E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$.
   (On commencera par considérer le cas où $A = X^i$ et $B = X^j$, avec $0 \leqslant i, j \leqslant n$).

2. **Deux cas particuliers**

   (a) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2).$$

   En déduire une condition nécessaire portant sur les réels s_1 et s_2, pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

   (b) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$, et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2, associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

3. **Deux exemples**

   Dans cette question, on considère un entier naturel n non nul.

   (a) Dans cette sous-question, on se donne un entier naturel d non nul et une variable aléatoire discrète Y, prenant d valeurs distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ avec les probabilités, strictement positives, respectives $p_1, \dots, p_d$, et on pose, pour tout entier naturel k :

$$s_k = E(Y^k) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k p_i.$$

   On considère les applications Φ_n et S_n associées à ce choix de $(s_0, \dots, s_{2n})$.

   i. Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité :

$$S_n(Q) = \sum_{i=1}^{d} Q(\alpha_i) p_i.$$

   ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que l'application Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

   (b) i. *Dans cette sous-question, on considère une variable aléatoire Y dont une densité f est continue sur le segment $[0, 1]$, et nulle en dehors de $[0, 1]$. On pose, pour tout entier naturel k,*

$$s_k = E(Y^k) = \int_0^1 t^k f(t)\ \mathrm{d}t.$$

   Vérifier que l'application Φ_n, associée à ce choix de $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

   ii. Montrer que, dans le cas où $(s_0, s_1, \dots, s_{2n}) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{2n+1}\right)$, l'application Φ_n associée à ce choix est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

4. Dans cette question, on revient au cas général où on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n+1$ réels et les applications Φ_n et S_n associées à cette suite.

*On **admet** le résultat suivant : tout polynôme P peut s'écrire sous la forme :*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \zeta_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell} (X^2 + b_j X + c_j),$$

où r et ℓ sont des entiers naturels (avec la convention que si r ou ℓ est nul, le produit correspondant vaut 1), où λ est un réel, où, si r est non nul, $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ sont les racines réelles distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$, et, où, si ℓ est non nul, $b_1, \ldots, b_\ell, c_1, \ldots, c_\ell$ sont des réels vérifiant $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant \ell$.

Un polynôme non nul P, à coefficients réels, est dit positif si, pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.

(a) Montrer que la multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.

(b) Montrer que tout polynôme P positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple de polynômes (A, B) tel que $P = A^2 + B^2$

(c) En remarquant que, si A, B, C, D sont quatre polynômes, on a

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2,$$

montrer que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes

(d) Montrer que Φ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de E_n, on a : $S_n(P) > 0$.

5. *Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$*

(a) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire, à partir de la base $(1, X, X^2)$, une base orthonormale de E_2 pour le produit scalaire Φ_2

(b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2), éléments de $\mathbb{R}^3$,

$$\Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tAMB,$$

où $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

(c) Déterminer une matrice T triangulaire telle que ${}^tTMT = I_3$ (I_3 désignant la matrice identité d'ordre 3).

6. *Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, \ldots, s_{2n})$, de premier terme $s_0 = 1$, telle que Φ_n soit une produit scalaire sur $E_n \times E_n$, et on note $(P_0, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n, pour le produit scalaire Φ_n, obtenue, par le procédé de Schmidt, à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$.*

(a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_i) = i$.

(b) En considérant le nombre $\Phi_n(P_n, 1)$, prouver que le polynôme P_n ne peut pas garder un signe fixe sur $\mathbb{R}$. En déduire que P_n possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

(c) On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaire. Montrer que P_n s'écrit sous la forme

$$P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i),$$

où ε est élément de $\{-1, 1\}$, et Q est un polynôme positif de E_n.

En considérant le nombre $\Phi_n \left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i) \right)$, montrer que $k = n$.

7. *On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les n racines du polynôme P_n, réelles et distinctes deux à deux selon la question précédente. Pour tout élément k de $\{1, \ldots, n\}$, on note L_k le polynôme*

$$L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$$

(a) Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et, pour tout polynôme R de E_{n-1}, justifier l'égalité $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$. En déduire $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

(b) Soit A un polynôme, élément de E_{2n-1}.

i. Justifier l'existence d'un couple (Q, R) élément de $E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que $A = P_n Q + R$.

ii. Vérifier que $S_n(A) = S_n(R)$, puis que

$$S_n(A) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i).$$

(c) Pour tout élément k de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $p_k = S_n(L_k)$.

Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, et, en considérant $S_n(L_k^2)$, montrer que $p_k > 0$.

(d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Y vérifiant, pour tout élément k de $\{0, \ldots, 2n-1\}$, $s_k = E(Y^k)$.

(e) Déterminer la loi d'une telle variable aléatoire, dans le cas où $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.