Jeudi 17 décembre 2009.

Concours Blanc n° 1 – Épreuve 2 (DS 5 – 4 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème – (Lyon 2005)

Partie I – Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.
2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0,\pi]$:
$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,mt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} = \frac{\sin\frac{tm}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(m+1)t}{2}}, \qquad \text{puis:} \qquad \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$
3. Soit $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0,\pi]$, et $f(0) = -1$.

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5. (a) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\ \mathrm{d}t$.

   (b) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$, et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II – Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. (a) Montrer que pour tout couple $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Établir : $\forall (x,y)\in[0,+\infty[,\quad S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   (b) En déduire : $\forall (x,y)\in[0,+\infty[^2,\quad |S(y)-S(x)|\leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x|$.

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x,y) de $[0,+\infty[^2$ tel que $x\neq y$:

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|\leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0,+\infty[$, et que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

   (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad S''(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+x)^3}.$$

   Montrer que S est concave.

6. Soit $x\in]0,+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t\in[1,+\infty[,\quad \varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \varphi(n+1)\leqslant \int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varphi(n)$, et en déduire :

$$\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant S(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Problème –

On étudie dans ce problème le temps passé par une personne à la poste lorsqu'un certain nombre de guichets sont ouverts et que plusieurs personnes se présentent simultanément.

Partie I – Étude d'un exemple

On suppose dans cette partie que 2 guichets sont ouverts et que trois personnes A_1, A_2 et A_3 se présentent en même temps à la poste, à un moment où il n'y a pas d'autre client. À l'instant $t = 0$, A_1 et A_2 s'adressent respectivement aux guichets 1 et 2, et A_3 attend qu'un des deux guichets se libère (la file étant commune aux deux guichets). On suppose que la durée de passage au guichet de chaque personne A_i, $i \in [\![1, 3]\!]$, est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, et que X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes.
Soit E l'événement : « A_3 quitte la poste en dernier ».

1. (a) Déterminer la loi suivie par $X_2' = -X_2$.
   (b) Déterminer une densité de probabilité φ_1 de $Y_1 = X_1 - X_2$.
   En déduire la fonction de répartition Φ_1 de Y_1.
   (c) Calculer la fonction de répartition Φ_2 de la variable $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité φ_2 de Z_1.
   (d) Justifier l'indépendance de Z_1 et $-X_3$. Calculer une densité φ_3 de $Z_1 - X_3$. En déduire la probabilité de $[Z_1 - X_3 \leqslant 0]$. Quelle est la probabilité de E ?
2. Soit T_3 la variable aléatoire égale au temps total passé à la poste par A_3.
   (a) Exprimer T_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3.
   (b) Déterminer une densité de probabilité f de $\inf(X_1, X_2)$.
   (c) Déterminer une densité de probabilité de T_3
   (d) Déterminer l'espérance mathématique de T_3.

Partie II – Cas où les opérations sont de deux types différents

Les personnes se présentant à la poste y font soit une opération postale, soit une opération bancaire, souvent plus longue. On suppose qu'une même personne ne vient pas à la fois pour une raison bancaire et pour une raison postale
Soit $p \in]0, 1[$. On suppose qu'étant donné une personne A se présentant à la poste, cette personne A effectue une opération postale avec une probabilité égale à p, et effectue une opération bancaire avec une probabilité égale à $1 - p$. Si la personne A effectue une opération postale, la durée X de l'opération suit un loi uniforme sur $[0, 1]$, et si la personne A effectue une opération bancaire, la durée X de l'opération suit une loi uniforme sur $[0, 2]$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition de X, et vérifier qu'une densité de X est donnée par :
$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 2] \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } p \in [0, 1[\\ \frac{1-p}{2} & \text{si } p \in [1, 2]. \end{cases}$$
   (b) Déterminer l'espérance de X
2. On suppose que, face à 2 guichets libres, 3 personnes A_1, A_2, et A_3 rentrent simultanément et que A_1 et A_2 s'adressent aux guichets 1 et 2 respectivement. Les temps de passage de A_1, A_2 et A_3 sont notés X_1, X_2 et X_3. Ce sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la même loi que la variable X de la question précédente.

(a) En s'inspirant de la partie I, déterminer la probabilité de l'événement E que A_3 sorte en dernier de la poste.

(b) Déterminer la fonction de répartition de $\inf(X_1, X_2)$, et calculer son espérance.

(c) Déterminer l'espérance du temps T_3 passé par A_3 dans la poste

3. On suppose maintenant que le guichet 1 est réservé aux opérations postales, et que le guichet 2 est réservé aux opérations bancaires. Ainsi, chaque personne se dirige avec une probabilité p vers le guichet 1 et avec une probabilité $1 - p$ vers le guichet 2.

   (a) On suppose que, dans la même situation que précédemment, A_3 vient effectuer une opération postale.

      i. Quelle est la loi de la variable aléatoire N égale au nombre de personnes passant au guichet 1 avant A_3 ?

      ii. Déterminer la fonction de répartition de T_3, le temps total passé par A_3 dans la poste.

      iii. À quelle condition nécessaire et suffisante sur p est-il en moyenne plus intéressant pour un individu d'avoir des guichets séparés pour les deux types d'opération, si l'individu se présente en même temps que deux autres, mais en troisième position, dans une poste initialement vide, et qu'il souhaite faire une opération postale.

Partie III – Cas d'un nombre plus grand de guichets

On suppose dans cette question que n guichets sont ouverts au public et que n personnes $A_1, \dots, A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets, les n guichets étant ainsi tous occupés à l'instant $t = 0$. On suppose que la durée de passage au guichet de A_i, $i \in [\![1, n]\!]$, est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Les variables X_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont mutuellement indépendantes.

1. Soit U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, la première, terminé sa démarche administrative. Déterminer la loi de U_n. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance et sa variance.

2. Soit V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, la dernière, terminé sa démarche administrative. Déterminer la fonction de répartition de V_n. En déduire une de ses densités de probabilité et montrer que son espérance mathématique est donnée par :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}.$$

3. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t. Déterminer la loi de W_t, ainsi que son espérance mathématique.

   Indication : on pourra considérer, pour chaque personne i, l'épreuve de Bernoulli consistant à ce que X_i prenne une valeur inférieure ou égale à t. À quoi correspond W_t en terme de ces épreuves de Bernoulli ?