Devoir surveillé n° 6 – Sujet « Parisiennes »

Les étudiants choisiront une des deux épreuves proposées (Parisienne ou Ecricome), et indiqueront clairement en début de copie le type de l'épreuve choisie.

L'épreuve de type « Parisiennes » est imposée à : Pottier, Barbier, Michel, Clerbois, de Mareuil, Tabath. Les autres étudaints ont le choix.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème – (d'après ESSEC 2002 – Math I)

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1.
L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II). À cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et leurs racines. Les deux parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre les résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II.

Partie I –

1. **Définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$**
   (a) Établir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\varphi(P) = 2XP' - P''$ (où P' et P'' désignent les dérivées premières et secondes de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **Éléments propres de l'endomorphisme φ**
   (a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de φ (supposées rangées dans l'ordre croissant) et montrer que φ est diagonalisable.
   (b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :
   $$H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0.$$

(c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, que H_p est nécessairement de degré p.

(d) Expliciter les polynômes H_0, H_1, H_2, H_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de X^{p-1} $(1 \leqslant p \leqslant n)$ et de X^{p-2} $(2 \leqslant p \leqslant n)$ dans l'expression du polynôme H_p.

3. **Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$**

(a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P, Q\rangle \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ en fonction de $\varphi(P)(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, puis prouver que φ est un endomorphisme symétrique pour ce produit scalaire.

(d) En déduire que $\langle H_p, H_q\rangle = 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n, puis que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire.
Montrer enfin que $\langle H_p, Q\rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$

4. **Étude des racines des polynômes H_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$**

(a) Montrer, en remarquant que $\langle H_p, H_0\rangle = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

(b) On note $a_1, a_2, \dots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leqslant p$), et on pose alors :

$$P_m(X) = (X - a_1)\dots(X - a_m).$$

Étudier le signe du polynôme H_pP_m et déterminer la valeur de l'intégrale $\langle H_p, P_m\rangle$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

(c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5. **Relations entre les polynômes H_p $(2 \leqslant p \leqslant n)$**

(a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$, où $3 \leqslant p \leqslant n$:

$$\langle XH_{p-1}, Q\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle H_p - XH_{p-1}, Q\rangle = 0.$$

En exprimant le polynôme $H_p - XH_{p-1}$ dans la base $(H_0, \dots, H_n)$, établir la relation :

$$2H_p - 2XH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0,\ \text{(pour } 2 \leqslant p \leqslant n)$$

(b) On se propose de calculer H_p à l'aide d'un programme en Pascal.

i. Expliquer pourquoi une procédure récursive, faisant appel, pour le calcul de H_p, à elle-même pour obtenir l'expression de H_{p-1} et de H_{p-2} afin d'utiliser la relation ci-dessus, n'est pas une solution satisfaisante

ii. On suppose défini un type `polynome`, tableau indexé de 0 à `Nmax` (constante suffisamment grande). Un polynôme P est alors représenté par un tableau T tel que $T[i]$ soit égal au coefficient de X^i de P. Écrire une procédure prenant en paramètre d'entrée une valeur de n, et calculant dans un paramètre de sortie le polynôme H_n.

(c) Prouver l'égalité $\langle H_p', Q\rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$, où $2 \leqslant p \leqslant n$, puis en déduire la relation :

$$H_p' = pH_{p-1},\ \text{(pour } 1 \leqslant p \leqslant n)$$

Partie II –

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$. On note U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables F définie sur U par :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_i - x_j).$$

Par exemple pour $n = 3$, on obtient :

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\ln(x_2 - x_1) - 2\ln(x_3 - x_2) - 2\ln(x_3 - x_1).$$

1. Justifier que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2. **Étude du cas particulier** $n = 2$ $(F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln(x_2 - x_1))$
   (a) Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point $x = (x_1, x_2)$ de U et déterminer l'unique point a de U où ces dérivées partielles sont nulles (*i.e.* l'unique point critique de F dans U)
   (b) Calculer $F(a)$.
   (c) Déterminer la hessienne $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ en tout point (x_1, x_2) de U.
   (d) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ en tout point (x_1, x_2) de U. En déduire le signe de la forme quadratique associée $q_{(x_1, x_2)}$.
   (e) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, en déduire que F présente un minimum global au point a, et que ce minimum n'est atteint qu'au point a.

3. **Étude du point critique de F dans le cas général**
   On associe, à tout point $a = (a_1, \dots a_n)$ de U le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n).$$

   (a) Établir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, \dots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - a_j}.$$

   En déduire la limite quand x tend a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x - a_i}$.
   (b) Déterminer, à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé), le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i + t) \qquad \text{et} \qquad g(t) = tP(a_i + t).$$

   (c) En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x - a_i}$ (on posera $x = a_i + t$)
   (d) Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

   (e) Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, \dots, x_n$, puis démontrer que si a est point critique de F, alors $2XP' - P''$ admet pour racines $a_1, \dots, a_n$.

(f) En déduire qu'il existe un nombre réel λ (dont on précisera la valeur) tel que $2XP' - P'' = \lambda P$, puis comparer les polynômes P et H_n. Établir que F admet un unique point critique a dans U.

4. **Nature du point critique de F dans le cas général**

(a) Montrer, si x, y appartiennent à U, que $tx + (1-t)y$ appartient aussi à U, si $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) On dit qu'une fonction f définie sur l'ouvert U est convexe si :

$$\forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

i. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $x \mapsto x_i^2$ est convexe sur U.

ii. Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto -\ln x \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U.

iii. Établir que F est convexe sur U.

(c) On désigne par a le point critique de F, et par x un élément de U et on pose, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\psi(t) = F(tx + (1-t)a).$$

i. Calculer la dérivée $\psi'(t)$, et montrer que $\psi'(0) = 0$.

ii. Établir l'inégalité ci-dessous, puis conclure que F admet un minimum en a :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leqslant F(x) - F(a).$$

5. **Calcul du minimum $F(a)$ de F dans le cas général**

On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

(a) On désigne par $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1} et par $z_1, \ldots, z_{n-2}$ les racines de H_{n-2} ($n \geqslant 3$).

i. Établir, à l'aide de la relation $2H_n - 2XH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$, les relations :

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i)\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \frac{2^2 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

ii. Établir que $|H_n'(a_i)| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$ et évaluer $p_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ en fonction de $\prod_{i=1}^{n} H_n'(a_i)$.

iii. Établir, à l'aide de la relation $H_n' = nH_{n-1}$, l'égalité $p_n^2 = n^n \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right|$.

iv. En déduire p_n en fonction de n

(b) En remarquant que le polynôme H_n vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} H_n(X) &= (X - a_1) \ldots (X - a_n) \\ &= X^n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} a_i X^{n-1} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j X^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n, \end{aligned}$$

calculer les sommes $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$, $\sum_{a \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$, puis $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i^2$.

(c) En déduire la valeur $F(a)$ du minimum de F sur U. Vérifier que l'expression obtenue reste valable pour $n = 2$.