

Devoir surveillé n° 6 – sujet « Ecricome »

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 –

1. Soient φ et θ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit (dans cette question uniquement) la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x, y) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$

Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1).$$

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, qui vérifie l'équation (1). On définit une fonction g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(u, v) = f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right).$$

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et montrer que

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}v(u, v) - 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 \quad (2).$$

3. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) + \frac{a}{t}h(t) = 0 \quad (3)$$

- (a) Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est solution de (3).
(b) Soit h une solution de (3). Montrer que la fonction $t \mapsto t^a h(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est une fonction constante.
(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (3).
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation (1). Justifier l'existence de deux fonctions θ et φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x, y) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$

Exercice 2 – (EDHEC 1998)

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc « Pile » ou « Face » avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On note P_k (resp F_k) l'événement « on obtient Pile (resp. Face) au k -ième lancer ».

Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira par exemple P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois « Pile » puis « Face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois « Pile » suivi de « Pile » aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de cet exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que « contre toute attente » $E(Y) > E(X)$

1. Calculer $P(X = 2)$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3

Montrer que si le premier lancer est un « Pile », alors il faut et il suffit que $P_1P_2 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $X = k$ se réalise.

(b) En déduire que : $\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$.

(c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.

Déterminer u_k puis donner la loi de X .

3. Montrer que X a une espérance, notée $E(X)$, et la calculer.

4. (a) Montrer que (F_1, P_1P_2, P_1F_1) est un système complet d'événements.

(b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k-1) + \frac{1}{4}P(Y = k-2). \quad (*)$$

(c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = P(Y = k)$. Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a, pour tout entier $k \geq 2$, $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$.

(d) (question ajoutée) On considère la fonction Pascal suivante :

```
function v(n:integer):real;
begin
  if n<0 then halt
  else
    if n=0 then v:=1
    else
      if n=1 then v:=0
      else
        v:=v(n-1)/2+v(n-2)/4;
end;
```

i. Que calcule cette fonction ? On justifiera soigneusement la réponse, notamment le fait que l'algorithme s'arrête.

ii. Expliquer rapidement pourquoi cet algorithme n'est pas bon, et en proposer un autre plus efficace pour les grandes valeurs de n .

iii. Déterminer C_n le nombre d'opérations nécessaires (+, -, *, /) pour le calcul de $v(n)$ par l'algorithme proposé par l'énoncé. (On pourra commencer par former une relation de récurrence)

(e) Expliciter la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ puis donner la loi de Y .

(f) Montrer que Y a une espérance, notée $E(Y)$, et la calculer.

Problème – (D’après Exercice 1 - Ecricome 2009)

Soit $n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l’ensemble des matrices carrées d’ordre n à coefficients réels.

Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A », et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A .

On admet que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$.

Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l’application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) = AM - MA$,
- les ensembles $\text{Sp}(A)$ et $\text{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs propres de A et de Φ_A respectivement,
- l’ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A .

Le but de cet exercice est d’établir les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,
- les valeurs propres de Φ_A forment l’ensemble Γ c’est-à-dire que $\text{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

Partie I – Étude d’un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les trois propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\langle -, - \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice T de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s’écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En déduire la diagonalisabilité de T .

2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu’en déduit-on sur les valeurs propres de T
3. Déterminer une base de l’espace propre associé à 0 de la matrice T .

4. Calculer TX_1 et TX_2 , où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $T = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1} , mais on justifiera soigneusement l’obtention de cette égalité)
6. (question ajoutée) Expliciter une matrice orthogonale Q telle que $T = QD {}^tQ$.
7. (question ajoutée)

(a) Déterminer une base orthonormale de l’image de Φ_A .

(b) Déterminer la matrice dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) de la projection orthogonale sur l’image de Φ_A .

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Justifier l’existence et l’unicité d’une matrice N de $\text{Im}(\Phi_A)$ telle que $\|M - N\|$ soit minimal (la norme considérée étant celle associée au produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Déterminer N ainsi que la distance de M à l’espace vectoriel $\text{Im}(\Phi_A)$.

(d) Retrouver les résultats de la question précédente à l’aide du théorème des moindres carrés, en remarquant que l’image de Φ_A est aussi égale à l’image d’une certaine application linéaire dont la matrice relativement à un certain choix de bases est constituée des deux premières colonnes de la matrice T .

Partie II – Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'application $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Établir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle.$$

En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

4. Soient :

- $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ,
- $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ .

On pose alors :

$$M_{X,Y} = X {}^t Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$, puis que ${}^t Y A = \mu {}^t Y$
 - (b) Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$, puis que $\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A)$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .
 - (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A , on a $MZ = 0$.
Montrer alors que $M = 0$.
En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
On note μ la valeur propre associée à Z_0 .
 - (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ .
 - (c) Conclure

Partie III – Étude du rang de Φ_A

Toute cette partie n'est pas présente dans le sujet Ecricomme. Elle utilise des résultats de la partie précédente.

1. Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(M_{X_i, Y_j} = X_i {}^t Y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) Soient X, X', Y, Y' des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Montrer que $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$ pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'introduction du problème.
- (b) Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$. Montrer que $\|M_{X,Y}\| = 1$ (pour la norme associée au produit scalaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- (c) En déduire que si $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ sont deux familles orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $(M_{X_i, Y_j} = X_i {}^t Y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit λ une valeur propre de A , et soit n_λ la dimension du sous-espace propre E_λ de A associé à la valeur propre λ . Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ .
 - (a) Montrer que $(X_i {}^t X_j)_{1 \leq i, j \leq n_\lambda}$ est une famille orthonormale de $\text{Ker}(\Phi_A)$. On note F_λ le sous-espace de $\text{Ker}(\Phi_A)$ engendré par ces vecteurs.
 - (b) Déterminer la dimension de F_λ .
4. Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Montrer que $F_\lambda \perp F_\mu$.
5. (a) Justifier que $\text{Ker}(\Phi_A) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$
- (b) En déduire que $\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} n_\lambda^2$.
- (c) Quel est le rang de Φ_A lorsque A est de rang 1 ? lorsque A possède n valeurs propres distinctes ?