Devoir Surveillé n° 8 – 4 heures
Épreuve de type « Ecricome »

Exercice 1 – (Ecricome 2006)

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a donc : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$, où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endormorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

A. **Quelques propriétés de f^***

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
2. Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).
   (a) Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $\langle x, f^*(y)\rangle$.
   (b) En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

B. **Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$**

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endormophismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.
3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.
   (a) Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.
   (b) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.
   (c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u.
   (d) Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.
   (e) Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
   (f) Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

   $$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix},$$

   où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 2 – (Ecricome 2009)
Le but de l'exercice est l'étude de la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\ \mathrm{d}t.$$

1. **Domaine de définition de f**
   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t$ est convergente, et donner sa valeur.
   (b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\ \mathrm{d}t$.
   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**
   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et tout réel t positif ou nul :
   $$x\mathrm{e}^t \leqslant \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}2x.$$
   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$.
   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**
   (a) À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\ \mathrm{d}u.$$
   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$
   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. **Étude locale de f et f' en 0**
   (a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}u,$$
   et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}u$ est convergente
   (b) À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :
   $$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$
   (c) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et préciser la valeur de $f'(0)$.

Problème – **(Ecricome 2007)** – Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ, $V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \operatorname{cov}(X,Y) + V(Y)$.
2. (a) En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que : $(\operatorname{cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$.
   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\operatorname{cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y)$?

Partie I – **Étude d'une fonction de deux variables**

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ la fonction L_n par :

$$L_n(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & si\ 0 \leqslant a \leqslant A \\ 0 & si\ a > A. \end{cases}$$

1. Justifier que L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$.
   Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.
2. Montrer que : $\forall a \in [0,A[,\quad \forall b \in]0,+\infty[,\quad L_n(a,b) < L_n(A,b)$.
   Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A,+\infty[$.
3. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(b) = L_n(A,b)$.
   Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0,+\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S et n.
4. Déduire de ce qui précède que L_n admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0,b_0) que l'on précisera.

Partie II – **Étude d'une loi**

Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}} & si\ x \geqslant a \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p, $E(X^p)$, et pour $p > 0$, déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.
5. Simulation de la loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   (a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U) + a$ suit une loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   (b) On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Écrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

Partie III – Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a,b)$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b.

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans S et Y).

```
begin
  randomize;
  readln(a,b,n);
  X:=tirage(a,b);
  S:=... ;
  Y:=... ;
  for i:=2 to n do ...
                 ......
                 ......
                 ......
  ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a)$?
   En déduire une densité de S_n.
4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
   En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).
   Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
5. (a) Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.
   (b) Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
   À l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.
6. On pose $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$.
   (a) Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b.
   (b) On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n. Montrer que
   $$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}\text{cov}(S_n, Y_n).$$
   (c) À l'aide du préliminaire, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$
   et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimteurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.
7. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :
   $$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$
   (a) Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i.
   (b) Comparer les estimateurs de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.