Sommes dénombrables

Rappel : sommes finies

Soit I un ensemble fini, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels (ou complexes) indexée par I. Il n'y a *a priori* pas d'ordre défini sur I, donc non plus sur les éléments a_i. Mais, comme la somme est commutative dans $\mathbb{R}$ (et dans $\mathbb{C}$), quel que soit l'ordre choisi pour faire la somme des éléments a_i, on trouvera toujours le même résultat. Ainsi, cette somme $\sum\limits_{i\in I} a_i$ est bien définie.
Remarquez que si $|I| = n$, alors, par définition, il existe une bijection $f : [\![1, n]\!] \to I$ (non unique bien sûr). Une telle bijection consiste simplement à choisir un ordre de sommation. Ainsi :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)},$$

le choix d'une autre bijection donnant le même résultat.

Tentative de généralisation au cas de sommes dénombrables

Supposons maintenant que I soit infini dénombrable. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, et est donc ordonné, on est ramené au cas des séries. On a donné un sens à ce type de somme : on a une notion de convergence, et en cas de convergence, une notion de somme.
Mais I n'est *a priori* pas égal à $\mathbb{N}$. Bien entendu, étant donné que I est dénombrable, il existe par définition une bijection $f : \mathbb{N} \to I$, qui nous suggère d'écrire, en cas de convergence :

$$« \sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)} »$$

Le but de ce qui suit est d'étudier la pertinence d'une telle égalité, autrement dit de savoir **si la convergence d'une part, et la valeur de la somme d'autre part sont indépendants du choix de la bijection f**

Importance de l'ordre de sommation

Nous montrons sur un exemple qu'en général, l'ordre de sommation peut influer sur la nature ou la valeur de la somme, dans le cas de convergence.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, et considérons la réindexation de $\mathbb{N}$ donnée par la bijection :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} 4k+1 & \text{si } n = 3k \\ 2k & \text{si } n = 3k+1 \\ 4k+3 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

(les nouveaux indices congrus à 1 modulo 3 parcourent les anciens indices pairs dans l'ordre, et nouveaux indices congrus à 0 ou 2 modulo 3 parcourent les anciens indices impairs, dans l'ordre ; c'est donc bien une bijection)
Considérons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle :

$$S_{3n+4} = \sum_{k=0}^{3n+4} u_{f(k)} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} (u_{f(3k+2)} + u_{f(3k+3)} + u_{f(3k+4)}).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{f(3k+2)} + u_{f(3k+3)} + u_{f(3k+4)} = u_{4k+2} + u_{4k+4} + u_{2k+2} = -\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{4k+4} - \frac{1}{4k+2} \leqslant 0.$$

Ainsi, les termes dans la somme sont tous négatifs. Par conséquent, soit la série $\sum u_{f(n)}$ diverge vers $-\infty$, soit elle converge, vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.
Or, $\sum u_n$ est convergente (série alternée), et sa somme est toujours comprise entre deux termes successifs de la suite des sommes partielles. En considérant les sommes partielles de rang 2 et 3, on obtient :

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{12} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \leqslant \frac{5}{6}.$$

On peut montrer en fait (voir formules de Taylor) que cette série converge vers $\ln 2$.
Ainsi, $\sum u_n$ et $\sum u_{f(n)}$ soit ne sont pas de même nature, soit sont de même nature mais de somme différente (il n'est pas très dur de montrer qu'on est en fait dans ce second cas). **D'où l'importance cruciale de l'ordre de sommation en général**

Nous indiquons sans démonstration un contre-exemple plus général, s'inspirant de la même situation.
Considérons une série alternée quelconque $\sum (-1)^n a_n$, qui ne soit pas absolument convergente. Ainsi :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$,
- la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle,
- $\sum (-1)^n a_n$ converge (théorème des séries alternées), mais $\sum a_n$ diverge (donc vers $+\infty$, puisqu'elle est à termes positifs).

Alors :

Proposition 1 *1. Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ vers I telle que $\sum a_{f(k)}$ converge vers ℓ*

2. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ vers I telle que $\sum a_{f(k)}$ diverge (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Cas des sommes positives

Supposons maintenant toujours que I est dénombrable, et en plus, que les a_i sont tous des réels positifs.

Proposition 2 *Supposons qu'il existe une $f : \mathbb{N} \to I$ telle que $\sum a_{f(i)}$ converge. Alors c'est le cas pour toute autre bijection g, et de plus :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{g(k)}.$$

Ainsi, ni la nature ni la valeur de la somme ne dépendent du choix d'une bijection.

Démonstration. Soit f donnée par la propriété d'existence de la proposition, et soit g une autre bijection quelconque de $\mathbb{N}$ vers I. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{g(k)} = \sum_{i \in g([\![0,n]\!])} a_i.$$

Les termes de la série étant tous positifs, cette suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de montrer qu'elle est majorée. Or, soit

$$N = \max\{f^{-1}(g(k)),\ k \in [\![1,n]\!]\} = \max f^{-1}(g[\![0,n]\!]).$$

Alors, $f^{-1}(g[\![0,n]\!]) \subset [\![0,N]\!]$, puis :

$$g([\![0,n]\!]) = f(f^{-1}(g([\![0,n]\!]))) \subset f([\![0,N]\!]).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{g(k)} = \sum_{i \in g(\llbracket 0,n \rrbracket)} a_i \leqslant \sum_{i \in f(\llbracket 0,N \rrbracket)} a_i = \sum_{k=0}^{N} a_{f(k)},$$

l'inégalité provenant du fait que les termes sont positifs. Le terme général des séries étant positif,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{g(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)},$$

et par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Étant croissante, elle est donc convergente. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{g(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)}.$$

Maintenant que la convergence est acquise, on peut faire le même raisonnement en inversant le rôle de f et de g, ce qui amène l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_{g(k)}.$$

On en déduit donc l'égalité. ■

Définition 3 *La proposition précédente montre que si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de réels positifs, alors la somme $\sum\limits_{i\in I} a_i$ a un sens dès lors qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to I$ telle que $\sum a_{f(k)}$ converge. On définit dans ce cas :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)}.$$

Cette quantité est indépendante du choix de f.

Cas des sommes absolument convergentes

D'après la proposition 2, s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to I$ telle que $\sum a_{f(k)}$ soit absolument convergente, alors c'est le cas pour tout choix de la bijection f. On définit alors :

Définition 4 *On dit que $\sum a_i$ est absolument convergente s'il existe $f : \mathbb{N} \to I$ une bijection telle que $\sum a_{f(i)}$ soit absolument convergente. Cette propriété ne dépend pas du choix de f.*

Proposition 5 *Supposons que $\sum a_i$ soit absolument convergente. Alors pour toute bijection $f : \mathbb{N} \to I$, $\sum a_{f(k)}$ est convergente, et sa somme ne dépend pas du choix de f.*

Démonstration. Pour toute bijection f, puisque $\sum a_{f(k)}$ est absolument convergente, elle est convergente. Ainsi, il suffit de montrer que sa somme ne dépend pas du choix de f.
Soit $n \in \mathbb{N}$, et reprenons N comme dans la démonstration précédente. Alors, comme précédemment,

$$g(\llbracket 1,n \rrbracket) \subset f(\llbracket 1,N \rrbracket),$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{N} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_{g(k)}\right| &= \left|\sum_{i\in f(\llbracket 1,N \rrbracket)} a_i - \sum_{i\in g(\llbracket 1,N \rrbracket)} a_i\right| = \left|\sum_{i\in f(\llbracket 1,N \rrbracket)\setminus g(\llbracket 1,N \rrbracket)} a_i\right| \\ &\leqslant \sum_{i\in f(\llbracket 1,N \rrbracket)\setminus g(\llbracket 1,N \rrbracket)} |a_i| = \sum_{i\in f(\llbracket 1,N \rrbracket)} |a_i| - \sum_{i\in g(\llbracket 1,N \rrbracket)} |a_i| = \sum_{k=1}^{N} |a_{f(k)}| - \sum_{k=1}^{n} |a_{g(k)}|.\end{aligned}$$

On sait que les quatre séries dans cette inégalité sont convergentes, et de plus, que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{f(k)}| = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{g(k)}|$, d'après la proposition 2. De plus, $N \geqslant n$, car $f([\![1,N]\!])$ (de cardinal N) contient $g([\![1,n]\!])$ (de cardinal n).
Par conséquent, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus lorsque n tend vers $+\infty$, alors N tend vers $+\infty$ aussi, et on obtient :

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_{f(k)} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{g(k)}\right| \leqslant 0, \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{g(k)}$$

■

Définition 6 *Si $\sum a_i$ est absolument convergente, on peut donc définir*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{f(k)}.$$

Cette quantité est indépendante du choix de f.

On se limitera toujours à ce cas de sommes indexées sur un ensemble dénombrable : si la somme est absolument convergente, on sait donner un sens à $\sum_{i \in I} a_i$.

Théorème 7 *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable. Alors $\sum_{i \in I} a_i$ est absolument convergente si et seulement si il existe M tel que pour tout sous-ensemble J fini de I,*

$$\sum_{i \in J} |a_i| \leqslant M.$$

Démonstration. Si I est fini, le résultat est évident. Supposons donc I dénombrable.

- Si $\sum a_i$ est absolument convergente, pour tout $J \subset I$ (et *a fortiori* lorsque J est fini),

$$\sum_{i \in J} |a_i| \leqslant \sum_{i \in I} |a_i|,$$

  et $M = \sum_{i \in I} |a_i|$ convient donc.
- réciproquement, supposons l'existence d'un tel M. Soit $f : \mathbb{N} \to I$ une bijection (f existe par définition de la dénombrabilité). Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$. Ainsi, A_n est un sous-ensemble fini de I. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |a_{f(k)}| = \sum_{i \in A_n} |a_i| \leqslant M.$$

  Ainsi, la série $\sum |a_{f(k)}|$ est à termes positifs, et de somme partielle majorée, donc convergente. Donc $\sum a_{f(k)}$ converge absolument, donc par définition, $\sum_{i \in I} a_i$ converge absolument.

■

Cas des sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille doublement indexée, I et J étant des ensembles dénombrables. Nous recherchons à quelles conditions on peut définir convenablement la somme $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j}$, et quel est l'effet d'une interversion des signes sommes sur le résultat.

Théorème 8 *(théorème de Fubini, cas de séries à termes positifs)*
Si pour tout $i \in I$, $\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ converge vers un réel $a_{i,\bullet}$ et si $\sum\limits_{j\in J} a_{i,\bullet}$ est convergente, alors pour tout $j \in J$, $\sum\limits_{i\in I} a_{i,j}$ est convergente, disons de somme $a_{\pi,j}$ et $\sum_{j\in J} a_{\bullet,j}$ est convergente. De plus, on a alors :

$$\sum_{i\in I} a_{i,\bullet} = \sum_{j\in J} a_{\bullet,j} \qquad i.e. \qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Démonstration. Supposons l'hypothèse vérifiée. Notons $S = \sum_{i\in I} a_{i,\bullet}$. Nous avons alors :

- Les termes étant tous positifs, pour tout $(i,j) \in I\times J$,

  $$0 \leqslant a_{i,j} \leqslant \sum_{j\in J} a_{i,j} = a_{i,\pi}.$$

  Or, par hypothèse, $\sum a_{i,\bullet}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, pour tout $j \in J$, $\sum_{i\in I} a_{i,j}$ converge. Soit $a_{\bullet,j}$ sa somme.
- Montrons la convergence de $\sum\limits_{j\in J} a_{\bullet,j}$, ce qui équivanut à se convergence absolue, la série étant à termes positifs. D'après le théorème 7, il suffit de montrer qu'il existe M tel que pour tout $A \subset J$ fini, $\sum\limits_{j\in A} a_{\bullet,j} \leqslant A$. Or, d'après les règles sur les sommes finies de séries, toutes les séries en jeu étant convergentes, on a :

  $$\sum_{j\in A} a_{\bullet,j} = \sum_{j\in A}\sum_{i\in I} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in A} a_{i,j}.$$

  Tous les termes étant positifs, on a, pour tout $i \in I$, $\sum\limits_{j\in A} a_{i,j} \leqslant a_{i,\bullet}$, donc, puisque $\sum\limits_{i\in I} a_{i,\bullet}$ converge, on peut écrire :

  $$\sum_{j\in A} a_{\bullet,j} \leqslant \sum_{i\in I} a_{i,\bullet} = S.$$

  Ainsi, S ne dépendant pas de A, $\sum_{j\in A} a_{\bullet,j}$ est convergente.
- On a donc obtenu : $\sum\limits_{j\in J} a_{\bullet,j} \leqslant \sum\limits_{i\in I} a_{i,\bullet} = S$.
  Du fait des convergences démontrées dans le point 2, la situation est maintenant symétrique en i et j, et on peut inverser le rôle de i et j. On trouve donc l'inégalité inverse :

  $$\sum_{i\in I} a_{i,\bullet} \leqslant \sum_{j\in J} a_{\bullet,j},$$

  d'où l'égalité.

■

Définition 9 *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille doublement indexée, I et J étant dénombrables. On dit que la somme double $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ est absolument convergente, si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :*

(i) pour tout $i \in I$, $\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ est ***absolument*** *convergente ; notons $|a|_{i,\bullet} = \sum\limits_{j\in J} |a_{i,j}|$;*

(ii) la série $\sum\limits_{i\in I} |a|_{i,\bullet}$ est convergente.

Remarquez que :

- Cette définition n'est *a priori* pas symétrique en i et j. C'est le théorème de Fubini ci-dessous qui permettra finalement d'affirmer la symétrie de cette définition.

- La convergence de la série du (ii) équivaut à sa convergence absolue, tous ses termes étant positifs.

Proposition 10 *Soit* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ *une série double absolument convergente. Alors pour tout* $i \in I$, $a_{i,\bullet}$ *est bien défini, et* $\sum\limits_{i\in I} a_{i,\bullet}$ *est absolument convergente. On note sa somme* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ est absolument convergente, donc la somme de cette série est bien définie, de valeur $a_{i,\bullet}$. Alors, pour tout $i \in I$,

$$0 \leqslant |a_{i,\bullet}| = \left|\sum_{j\in J} a_{i,j}\right| \leqslant \sum_{j\in J} |a_{i,j}| = |a|_{i,\bullet}.$$

Par conséquent, puisque $\sum\limits_{i\in I} |a|_{i,\bullet}$ converge, le TCSTP nous assure que $\sum\limits_{i\in I} a_{i,\bullet}$ converge absolument, donc que sa somme est bien définie. ■

Lemme 11 *Soit* $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *et* $(b_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *telles que pour tout* $(i,j) \in I \times J$, $|a_{i,j}| \leqslant |b_{i,j}|$. *Alors, si* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} b_{i,j}$ *converge absolument, il en est de même de* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$.

Démonstration.
- Soit $i \in I$. Alors, pour tout $j \in J$, $|a_{i,j}| \leqslant |b_{i,j}|$. Comme $\sum\limits_{j\in J} |b_{i,j}|$ converge, il en est de même de $\sum\limits_{j\in J} |a_{i,j}|$, d'après le TCSTP, et, avec les notations précédentes, $|a|_{i,\bullet} \leqslant |b|_{i,\bullet}$.
- Or, $\sum\limits_{i\in I} |b|_{i,\bullet}$ converge, par définition, donc d'après le TCSTP, $\sum\limits_{i\in I} |a|_{i,\bullet}$ converge.

Ainsi, $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ est absolument convergente. ■

Lemme 12 *Soit* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ *une série double absolument convergente. Soit pour tout* $(i,j) \in I \times J$ *:*
- $a^+_{i,j} = \max(0, a_{i,j})$ *(c'est-à-dire* $a_{i,j}$ *si* $a_{i,j} \geqslant 0$*, et* 0 *sinon)*
- $a^-_{i,j} = \min(0, a_{i,j})$ *(c'est-à-dire* $a_{i,j}$ *si* $a_{i,j} \leqslant 0$*, et* 0 *sinon)*

Alors, clairement, $a_{i,j} = a^+_{i,j} + a^-_{i,j}$. *De plus les deux séries* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a^+_{i,j}$ *et* $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a^-_{i,j}$ *convergent absolument, et*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a^+_{i,j} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a^-_{i,j}.$$

Ainsi, toute série double absolument convergente s'écrit comme la différence de deux séries doubles absolument convergentes à termes positifs.

Démonstration. On a clairement, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $|a^+_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}|$, et $|a^-_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}|$. Ainsi, d'après le lemme 11, les deux séries doubles $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a^+_{i,j}$ et $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a^-_{i,j}$ convergent absolument. De plus, d'après les règles de linéarité des sommes infinies, on obtient alors :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a^+_{i,j} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a^-_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a^+_{i,j} + \sum_{j\in J} a^-_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(a^+_{i,j} + a^-_{i,j}) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j}.$$

■

Théorème 13 *(théorème de Fubini, cas de séries à termes quelconques)*
Si $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{i,j}$ *converge absolument, alors aussi* $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I} a_{i,j}$, *et dans ce cas :*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

on dit alors simplement que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ *converge absolument, et on s'autorise à écrire :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Démonstration. La convergence absolue de $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I} a_{i,j}$ découle simplement de l'application du théorème de Fubini dans le cas de séries à termes positifs, appliqué à la série $\sum\limits_{(i,j)} |a_{i,j}|$.
De plus, d'après le lemme 12 appliqué à deux reprises et le théorème de Fubini appliqué aux séries à termes positifs $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a^+_{i,j}$ et $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} -a^-_{i,j}$, on obtient :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a^+_{i,j} - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} -a^-_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a^+_{i,j} - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} -a^-_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

■

Théorème 14 *(Une condition nécessaire et suffisante de convergence absolue)*
Soit $\sum (i,j) \in I \times J a_{i,j}$ une série double. Alors cette série est absolument convergente si et seulement s'il existe un réel M tel que pour tout sous-ensemble fini A de I et tout sous-ensemble fini B de J on ait :

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} |a_{i,j}| \leqslant M$$

(cette somme étant une somme finie).

Démonstration.
- Si la série est absolument convergente, les sommes $\sum i \in A \sum\limits_{j\in B} |a_{i,j}|$ sont majorées par la somme totale $\sum i \in I \sum\limits_{j\in J} |a_{i,j}|$.
- Réciproquement, si M est tel que dans l'énoncé, soit $i \in I$. En prenant $A = \{i\}$, on obtient $\sum\limits_{j\in B} |a_{i,j}| \leqslant M$, donc, d'après le théorème 7, $\sum_{j\in J} a_{i,j}$ converge absolument.
  Soit A quelconque fini. Alors, une somme finie de séries absolument convergentes étant absolument convergente, la série en j de terme général $\sum_{i\in A} |a_{i,j}|$ est absolument convergente. Or, pour tout B fini,

  $$\sum_{j\in B}\sum_{i\in A} |a_{i,j}| = \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} |a_{i,j}| \leqslant M.$$

  Toutes les sommes partielles de la série de terme général $\sum_{i\in A} |a_{i,j}|$ étant majorées par M, sa somme est aussi majorée par M. Donc :

  $$\sum_{j\in J}\sum_{i\in A} |a_{i,j}| \leqslant M$$

  Par linéarité de la somme pour des séries convergentes, A étant fini,

  $$\sum_{i\in A}\sum_{j\in J} |a_{i,j}| \leqslant M, i.e. \sum_{i\in A} |a|_{i,\bullet} \leqslant M.$$

  Cela étant vrai pour tout sous-ensemble fini A de I, le théorème 7 permet de conclure que $\sum\limits_{i\in I} |a|_{i,\bullet}$ converge.
  Ainsi, la série double $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ est absolument convergente.

■