Informatique – TP n° 4 – Modélisation de lois discrètes

Exercice 1 – On veut écrire des fonctions dont la sortie est une variable aléatoire suivant certaines lois classiques ; les paramètres des lois seront également des paramètres de la fonction. On rappelle que la fonction `random` renvoie un réel dans l'intervalle $[0,1]$ de manière uniforme, et que si n est un entier, `random(n)` renvoie de manière uniforme un entier entre 0 et $n-1$. Avant utilisation, le générateur aléatoire `random` doit toujours être initialisé par l'instruction `randomize ;` sans cette initialisation, les valeurs renvoyées sont toujours les valeurs extrémales de l'intervalle. L'initialisation doit se faire une seule fois, en début de programme.

Exemple : Pour modéliser la loi de Bernoulli de paramètre p réel, on crée une fonction prenant en paramètre la valeur p, et renvoyant soit 0, avec une probabilité de $1-p$, soit 1, avec une probabilité de p. La valeur obtenue par `random` est dans l'intervalle $[0,p]$ avec une probabilité de $\frac{p}{1}$ (rapport des longueurs des intervalles) puisque `random` renvoie de manière uniforme une valeur dans $[0,1]$. Ainsi, pour modéliser la loi de Bernoulli de paramètre p, il suffit de conparer la valeur obtenue par un `random` à p : si on obtient moins, on renvoie la valeur 1 (donc avec une proabilité p), sinon, on renvoie la valeur 0.
Cas où le paramètre est rationnel : si p est un rationnel, par exemple $\frac{3}{7}$, la méthode précédente n'utilisera qu'une valeur approchée décimale de p. Pour avoir une méthode théorique plus exacte, on peut utiliser plutôt la fonction `random(7)` renvoyant un entier entre 0 et 6. La probabilité de $frac37$ s'obtient alors en choisissant parmi les 7 valeurs possibles, 3 valeurs correspondant à des succès, par exemple 0, 1 et 2. Ainsi, si la valeur obtenue par `random(7)` est strictement plus petite que 3 (3 valeurs possibles sur 7, donc cet événement est réalisé avec une probabilité de $\frac{3}{7}$), on renvoie la valeur 1, sinon on renvoie la valeur 0.
Écrire des fonctions suivant les lois suivantes, et calculer la moyenne obtenue en répétant 1000 fois l'expérience :

1. La loi uniforme $\mathcal{U}([\![n,m]\!])$.
2. La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, p étant réel.
3. La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,\frac{p}{q})$, p et q étant des entiers tels que $p \leqslant q$, pris en paramètre.
4. La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, p réel.
5. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
6. La loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$.
7. La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ (on entrera comme paramètre non pas p, mais le nombre entier Np, nombre de boules blanches).
   Indication :
   - Première méthode : Avoir deux variables indiquant le nombre de boules blanches et noires restantes. Tirer un nombre inférieur au nombre total de boules restantes ; décider si c'est une boule blanche ou une boule noire suivant la valeur.
   - Deuxième méthode : récursivité.

   On implémentera les deux méthodes.
8. Temps d'attente dans un tirage sans remise (paramètres N, Np).

Exercice 2 –

1. Écrire un programme demandant à l'utilisateur un entier strictement positif r (test de compatibilité à faire) et renvoyant les valeurs d'une variable aléatoire suivant la loi du temps d'attente de la première série de r « six » successifs dans une succession de lancers de dés (non pipés). Pour chaque valeur de r choisie, donner une valeur approchée de l'espérance (prendre la moyenne sur 1000 expériences).
2. Écrire un programme renvoyant les valeurs d'une variable aléatoire suivant la loi du temps d'attente de la première occurrence de PPFFPF dans une suite de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée.
3. Même question avec PPFFPFPPFFPF.