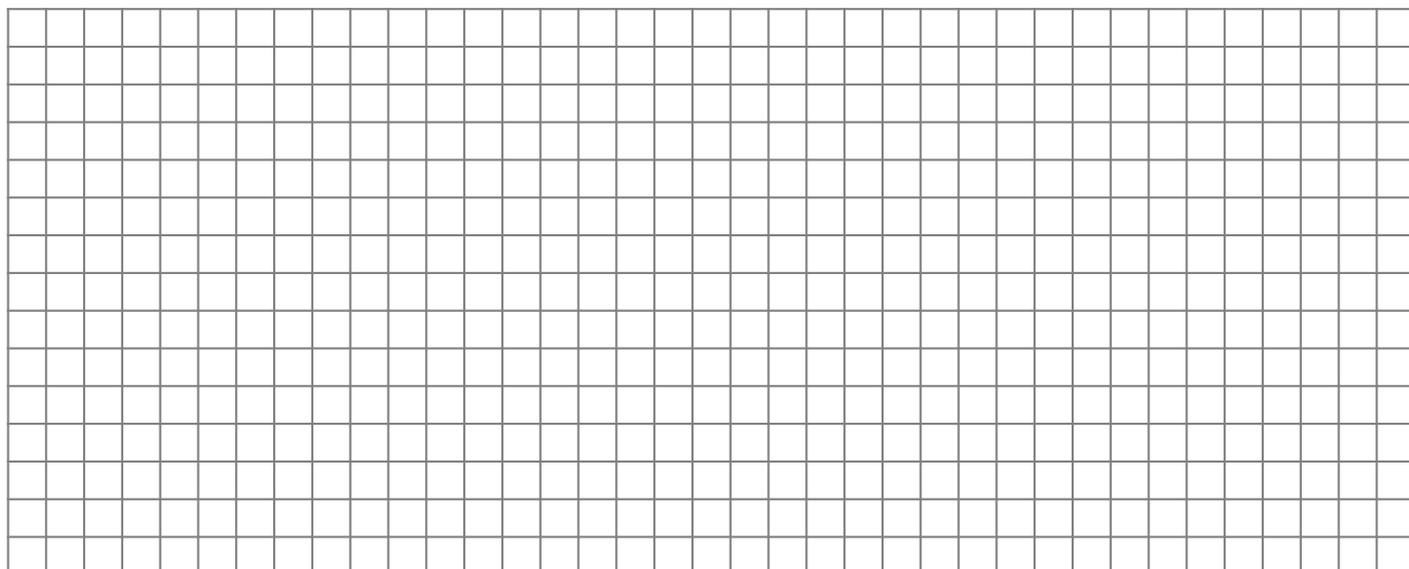


Interrogation n° 3 (1 heure)
DL, intégrales impropres, variables aléatoires à densité

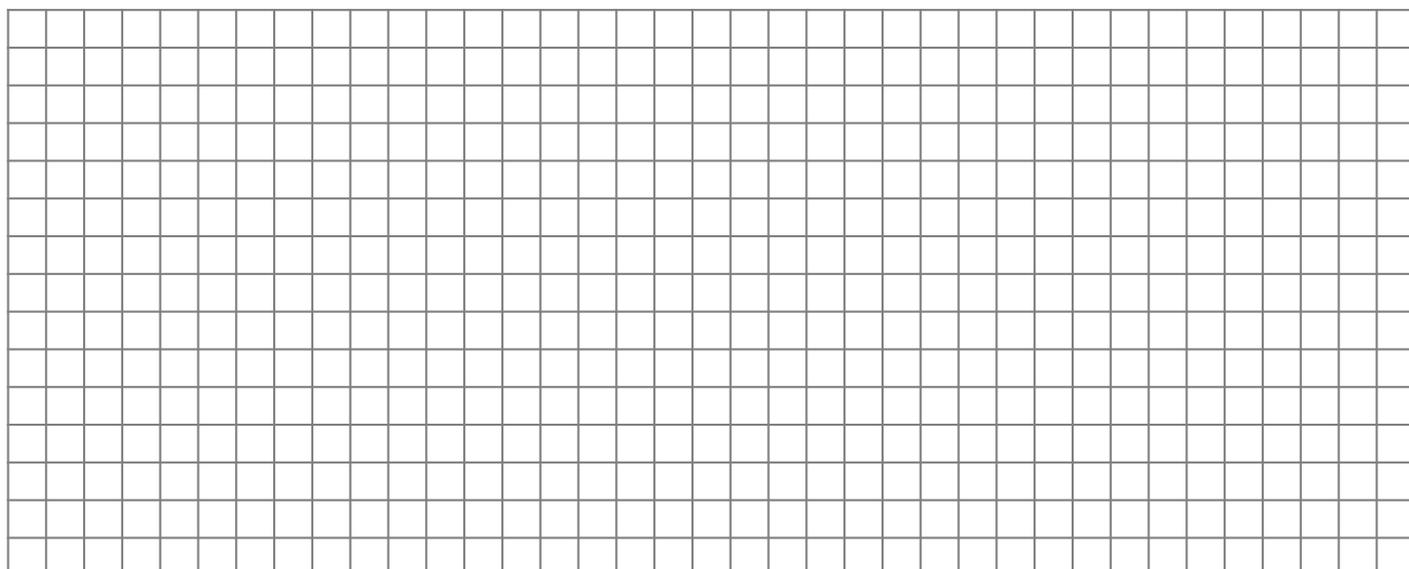
Note sur 40 :	Observations :
Note sur 20 :	
Rang :	

1. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \sin x\right)$

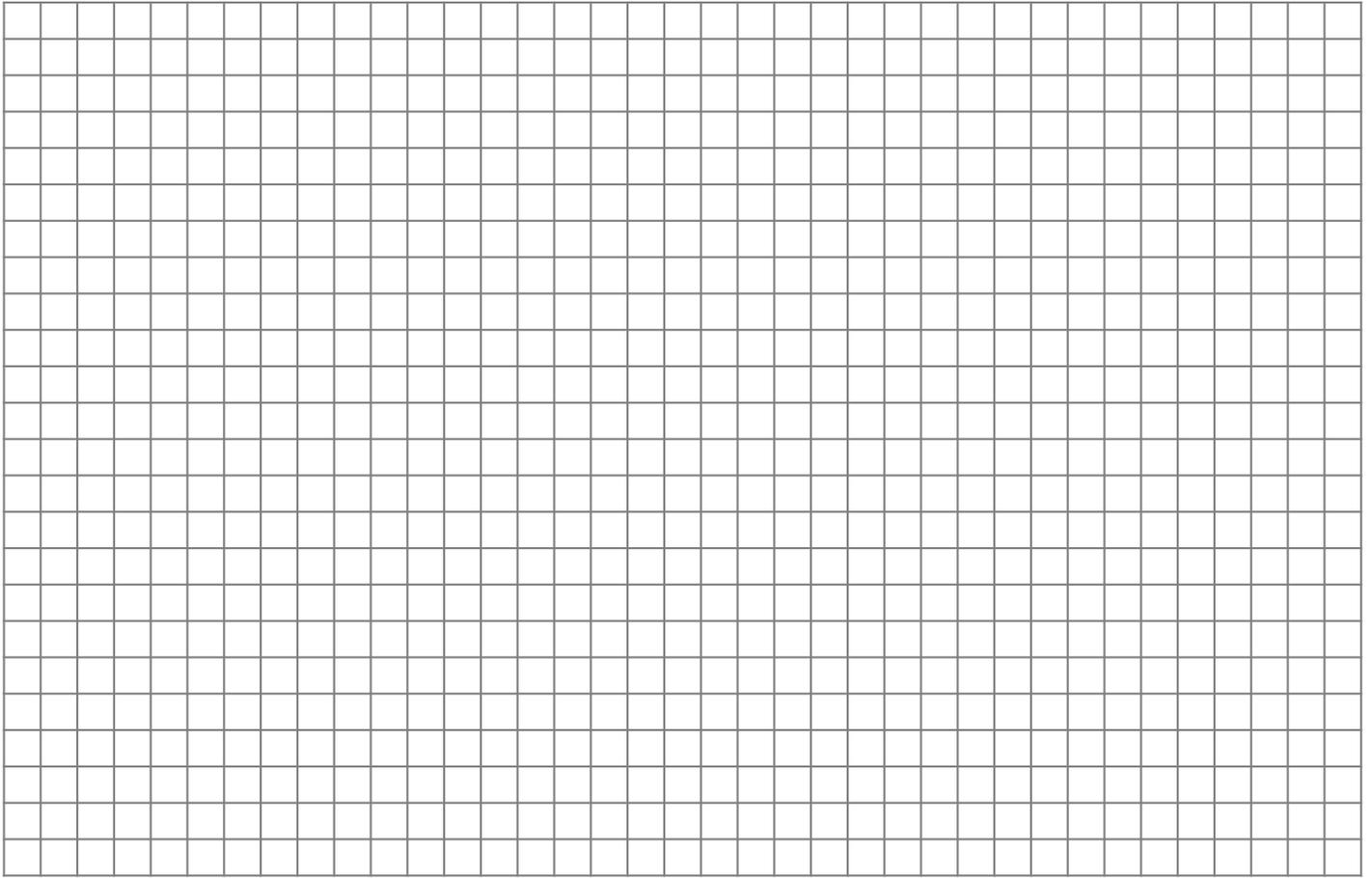


2. Équation de l'asymptote en $+\infty$ et position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$, pour la fonction f définie sur son domaine par :

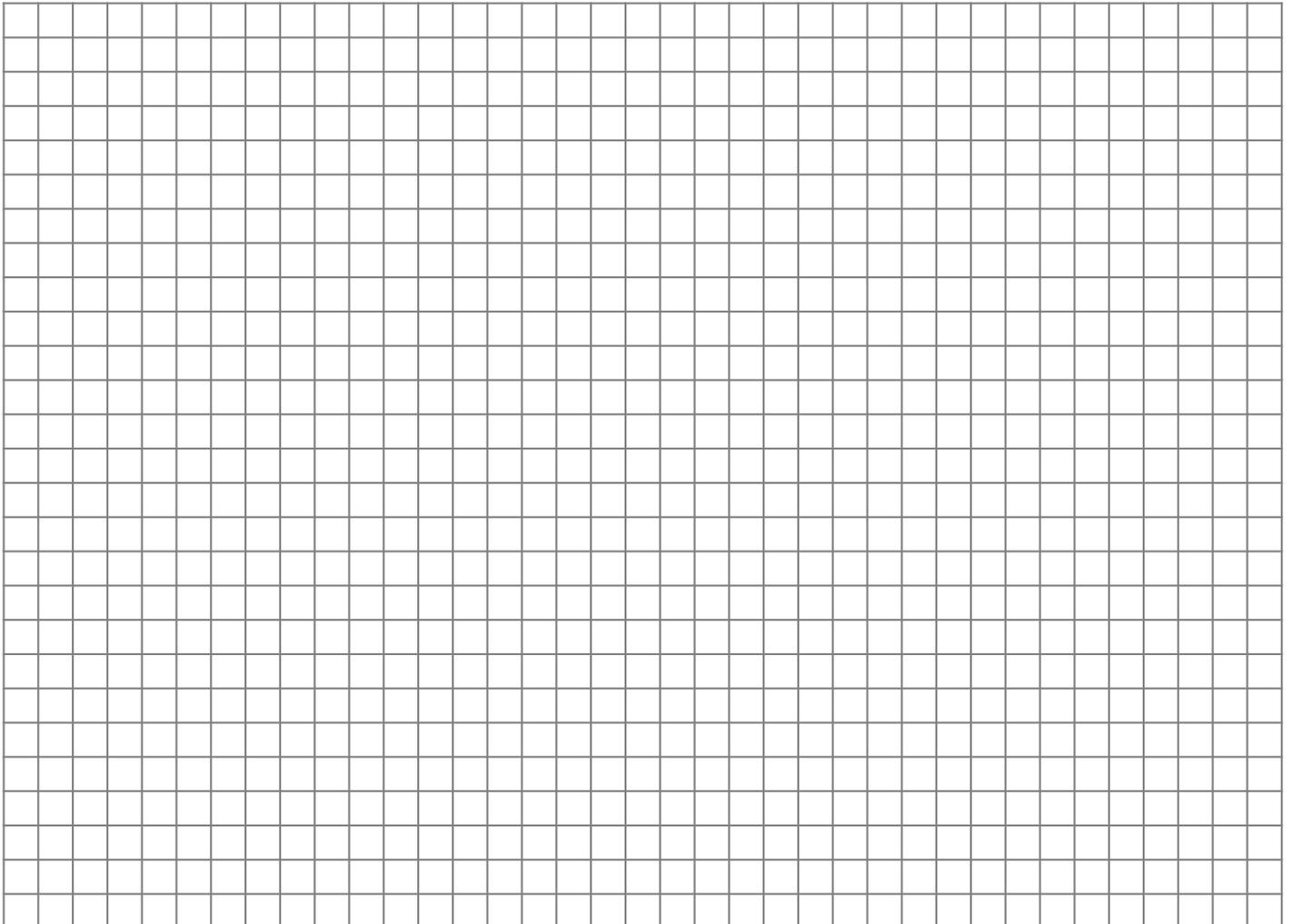
$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}$$



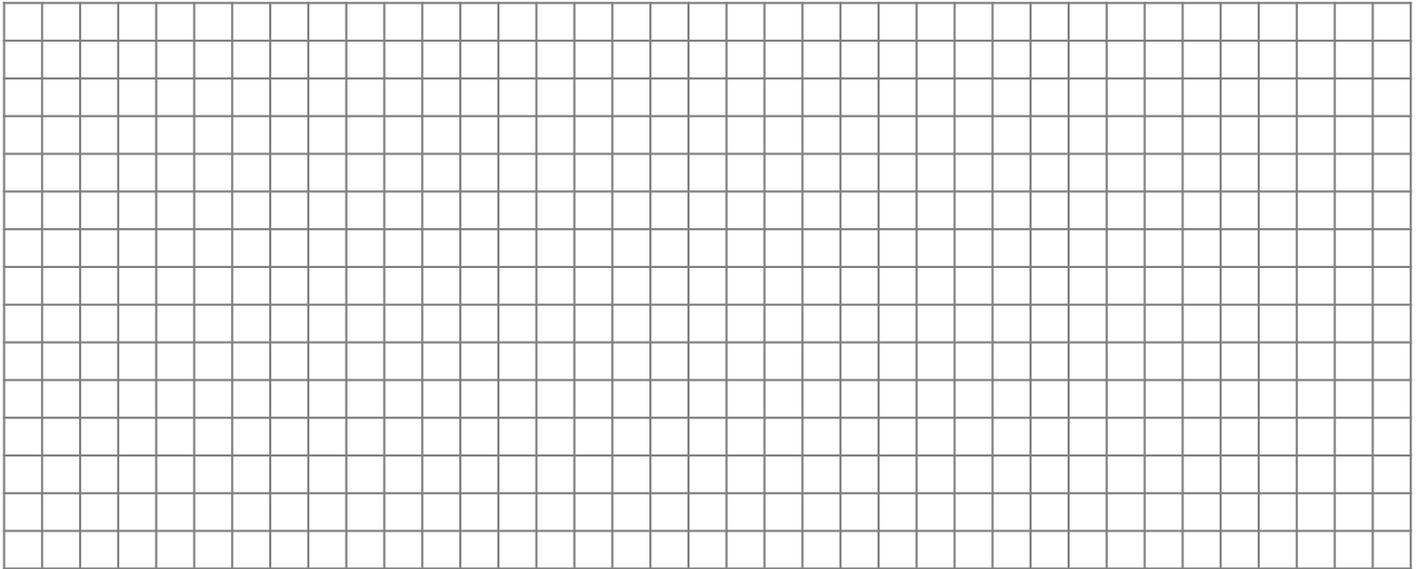
3. Nature et valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$



4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si toutes les racines de P sont réelles, alors il en est de même de P' . En déduire que dans ce cas, toutes les racines de $P^2 + 1$ sont non réelles, et simples.

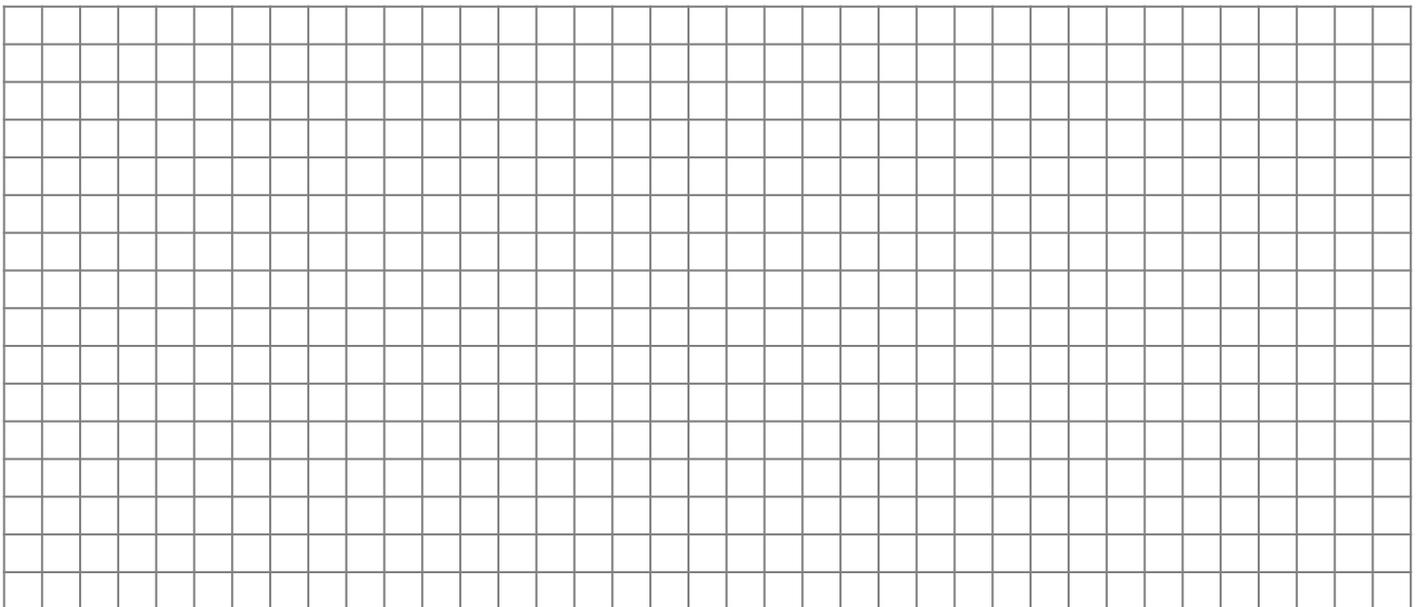


5. Énoncer les trois formules de Taylor

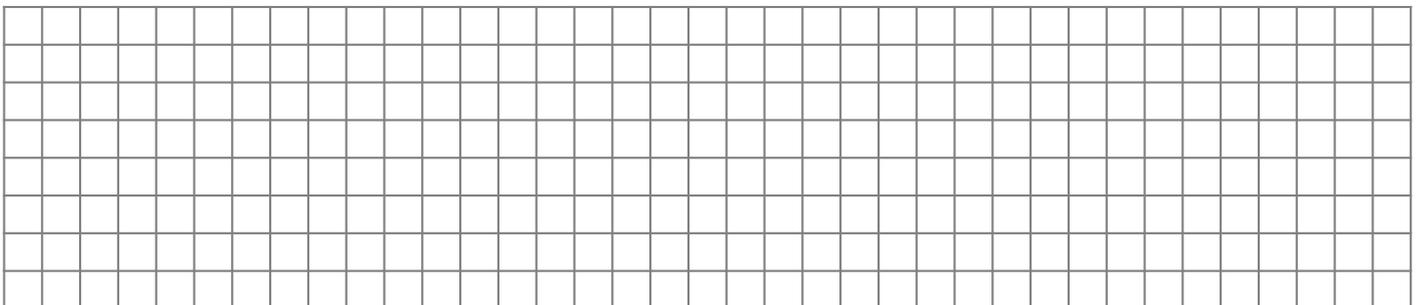


6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

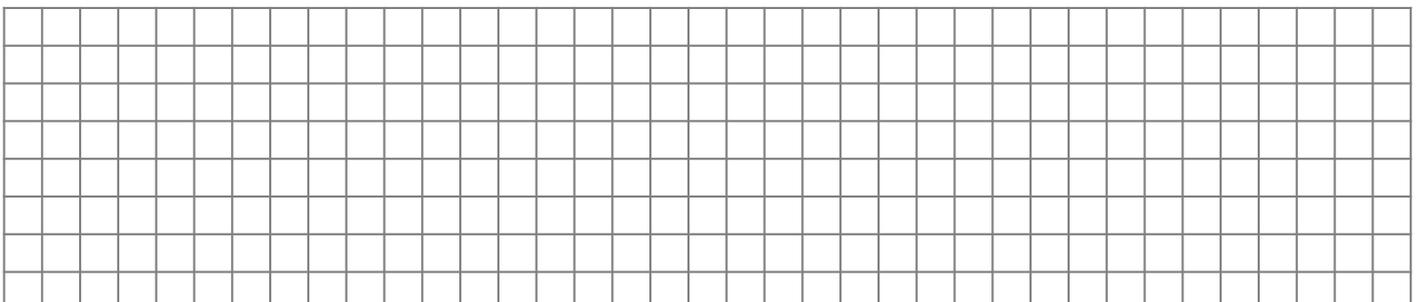
En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}$.



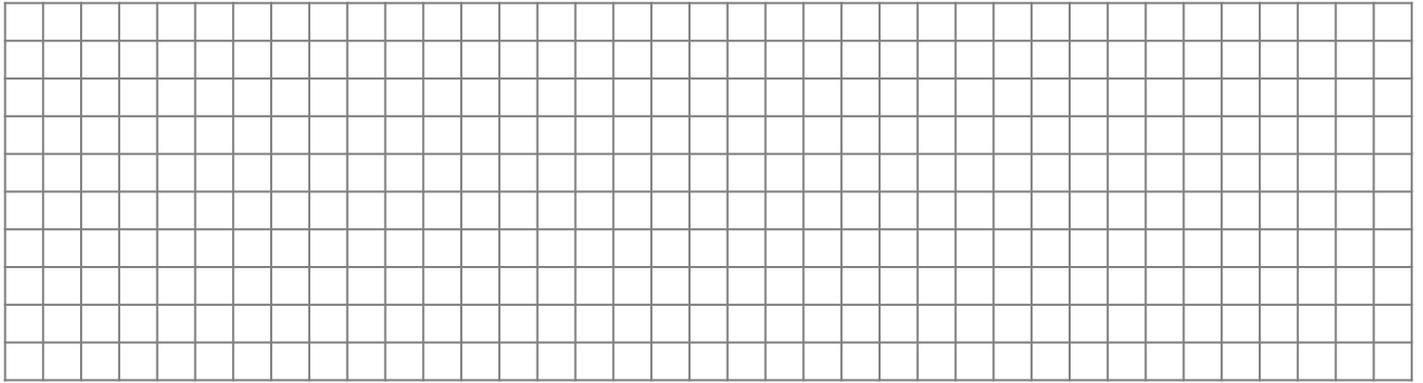
7. Définition d'une densité de probabilité



8. Second théorème de transfert

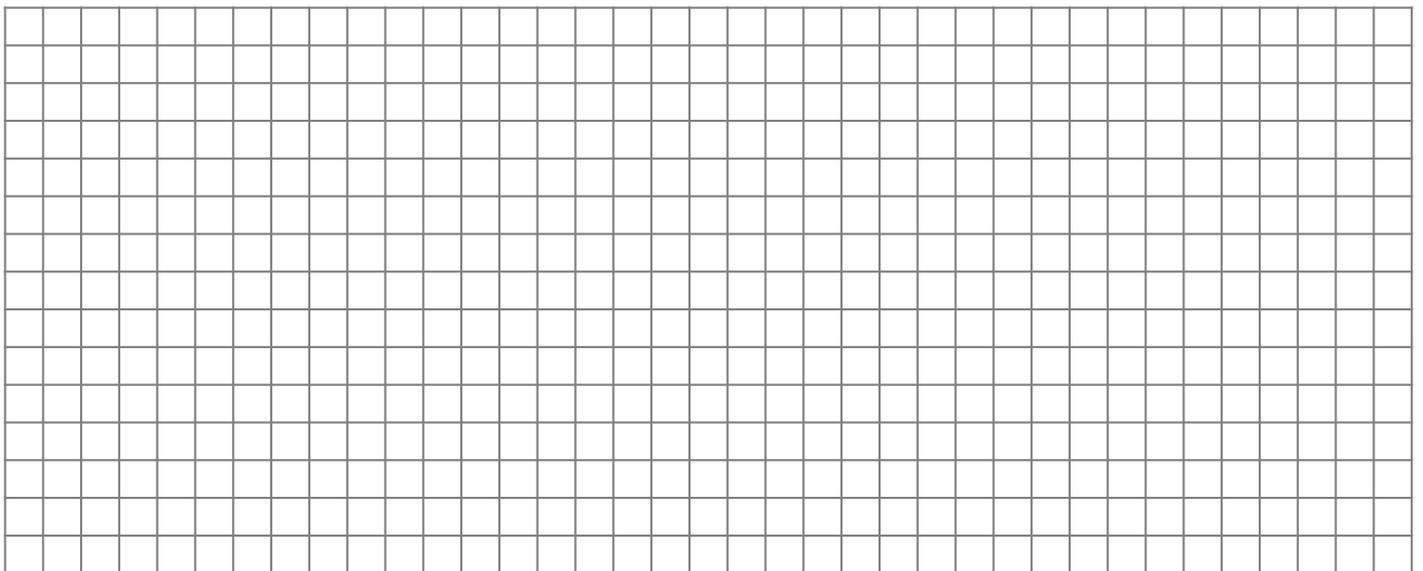


9. Définition du produit de convolution, et densité de la somme de deux variables à densité.



10. Comment choisir a pour que la fonction f suivante soit une densité de probabilité :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



11. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de la question précédente, et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

