Algèbre 1 – Algèbre linéaire (révisions)

Exercice 1 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 2 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 3 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g).$$
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g).$$
3. Soit g un projecteur, alors $\mathrm{id} - g$ est un projecteur et $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}(\mathrm{id} - g)$, et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - g)$.
4. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :
$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme
$$P(X) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - x_k).$$
Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :
$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j)P'(x_j)}$$

1. Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n - 1$.
2. Calculer $P_j(x_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et montrer que pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \sum_{j=1}^{n} F(x_j)P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \dots, x_n$.
3. Montrer que $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$. Plus généralement, que vaut L_F si $\deg F \leqslant n - 1$?
4. Les polynômes $(P_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
5. On écrit : $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$. Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$.
6. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$. Indication : on pourra considérer $F(X) = X^j$.
7. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on déterminera.

Exercice 5 – (HEC) – Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions f_k, $k \in \mathbb{N}$, par :
$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) = \cos^k(x),$$
et les fonctions φ_k, $k \in \mathbb{N}$, par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_k(x) = \cos(kx)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)\varphi_h(x)\ \mathrm{d}x$, pour tout $(h,k) \in [\![1,n]\!]^2$.
   En déduire que la famille $\mathcal{F}_n = (\varphi_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.
2. On désigne par F_n le sev de E constitué des combinaisons linéaires de φ_i, $i \in [\![0,n]\!]$.
   (a) Quelle est la dimension de F_n ?
   (b) Soit p un entier inférieur ou égal à n. Montrer que $f_p \in F_n$, et déterminer ses composantes dans $\mathcal{F}_n$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^p(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x$, pour $k \in [\![1,n]\!]$.
3. Étudier l'appartenance de la fonction $x \mapsto \sin^p(x)$ à F_n.

Exercice 6 – Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\ \ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\mathrm{Im}\ \ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geqslant p$. Qu'en est-il de $\mathrm{Im}(u^k)$?
3. Montrer que pour une telle valeur de p, $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\, u^{p+1} - \dim \mathrm{Ker}\, u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En d'autres termes, les sauts de dimension sont de plus en plus petits.
   Indication : Écrire $\mathrm{Ker}\, u^{p+1} = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus S$, et montrer que u se restreint en une injection de S dans $\mathrm{Ker}\, u^p$ dont l'image est en somme directe avec $\mathrm{Ker}\, u^{p-1}$.
5. On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant \dim(E)$, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

Exercice 7 – On considère E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $(p+1)n$, n et p étant des entiers non nuls, avec $p \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E, vérifiant : $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = pn$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.
Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)\cdot$ Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tels que $f = g \circ p$.

Exercice 9 – Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer que le rang de f est 1.

Exercice 10 – Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + P'$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 11 –

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que : $u^3 - u = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ \ u \oplus \mathrm{Im}\ \ u^2$.
2. Reprendre la question précédente sans l'hypothèse de finitude de la dimension.
3. Soient E un ev de dimension finie, $m \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, f un endomorphisme de E, et $a_1, a_2, \dots a_m$ des réels tels que $a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f = 0$, avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ \ f \oplus \mathrm{Im}\ \ f$.

Exercice 12 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire $u^n = 0$ pour n assez grand). On note n l'indice de nilpotence de u (c'est-à-dire $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Comparer n et d.
3. Si $n = d$, justifier l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Montrer les assertions suivantes.

1. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Deux matrices semblables ont même trace.

Justifier qu'on peut ainsi définir la notion de trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 14 – temps idéal : 1h
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

On note, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de E ?
2. (a) Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice A de D relativement à la base $\mathcal{B}$
   (c) L'endomorphisme D est-il un isomorphisme ? Est-il diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants.
3. *Soit $B = A - I_{n+1}$, où I_{n+1} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et soit f l'endomorphisme associé à la matrice B relativement à la base $\mathcal{B}$.*
   (a) Déterminer en fonction des b_i l'expression de $f(b_j)$, $j \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$
   (d) En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Déterminer à l'aide de la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de la fonction b_n. Retrouver ce résultat directement à l'aide d'une formule du cours.
4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 5$.**
   (a) Déterminer A^{-1}.
   (b) En déduire une primitive de la fonction b_5.
   (c) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. Quel résultat classique retrouve-t-on ?
5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de D est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 – (Oral ESCP 2009) On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On appelle *carré magique* d'ordre 3, toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales. Cette somme est notée $s(M)$.
On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'application s définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout M de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(M)$, est linéaire et que :

$$C = \mathrm{Vect}(J) \oplus \mathrm{Ker}\, s$$

2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}).$$

   (b) Déterminer $A \cap \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s$. En déduire une base de $\mathcal{C}$.
   (c) Déterminer un vecteur propre commun à tous les carrés magiques. En déduire tous les carrés magiques M pour lesquels M^2 est un carré magique.

Exercice 16 – (ESCP 2010)
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On note v_1 le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M avec :

$$M = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les coefficients diagonaux valent 0 et les autres valent $\frac{1}{n-1}$)
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) La matrice $M - I$ est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.
   (a) Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_1), \ldots, p(e_n)$.
   (b) Expliciter la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit q le projecteur sur $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Expliciter la matrice Q de q dans la base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire M^k pour tout entier naturel k non nul. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k$ (la limite s'entendant coefficient par coefficient).
5. Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} ainsi que M^{-k}, pour tout entier naturel non nul k, en fonction de P et Q.

Exercice 17 – (QC ESCP 2009) Soit $n \in NN^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A,$$

ou $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.
3. Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Exercice 18 – (QC ESCP 2007)
Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 –

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.
2. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée uniquement de 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Soit a et b deux réels et $B = aI_n + bA$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que B soit inversible. Calculer B^p. Montrer que la formule se généralise pour p négatif.

Exercice 21 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.