Algèbre 2 – Algèbre linéaire (Feuille technique)

Qui a calculé (bien) calculera (bien)

(Proverbe Troeschien, début XXI-ième siècle)

Exercice 1 – Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x-y+3z &= 1 \\ 2x-2y+z &= 3 \\ 2x-y-z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+2z-5t &= 1 \\ x-2y+t &= 0 \\ 2x-z-t &= 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+y &= 2 \\ 3x+4y &= 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+y &= 2 \\ 3x+4y &= 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+z+2t+3u &= 2 \\ x+3y+z+2t &= 1 \\ y-3u &= -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+z+2t+3u &= 2 \\ x+3y+z+2t &= 1 \\ y-3u &= 0 \end{cases}$

Exercice 2 – Étudier la liberté des familles suivantes (dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

1. (φ_a, φ_b), $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, où pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : x \mapsto \sin(x+a)$.
2. $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
3. $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $f_k : x \mapsto \cos^k x$
4. idem pour $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
5. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : x \mapsto x^n \cos(x)$, $g_n : x \mapsto x^n \sin(x)$.
6. $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})$ soit infini.
7. $(f_n)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : x \mapsto \cos(x^k)$.

Exercice 3 – **Produit matriciel**

1. (15 secondes)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_7 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (30 secondes)

$$P_7 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Rang d'une matrice
Déterminer le rang des matrices suivantes

1. (10 secondes)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. (20 à 30 secondes)

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad M_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{15} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (1 minute)

$$M_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (3 minutes)

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 – Calcul de l'inverse d'une matrice
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1. (20 secondes)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (5 minutes)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (10 minutes)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4. (20 minutes)

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 – Matrice d'une AL relativement à des bases Montrer que les applications f ci-dessus sont des applications linéaires de E dans F, et donner leur matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et de F.
(15 secondes à 1 minute suivant les cas)

1. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x-y,x+y)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
2. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,2x)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
3. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+3y,2x+y)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$
4. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x+y,x-3y)$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$
5. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+2y,3x-3y)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

($<$ 2 minutes)

6. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(3z-2x+y,x+y+z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
7. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-2y-2z,x+y-z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.

($<$ 4 minutes)

8. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-2y,y+z,z-x)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
9. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(2x-y-2z,y-z,2y+z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
10. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=P-P'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
11. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=nXP-X^2P'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
12. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
13. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$
14. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=(1,1+X,1+X+X^2,\cdots,1+X+X^2+\cdots+X^n)$.
15. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$, $f(g)=g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,\sin)$
16. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$, $f(g)=h:x\mapsto g(a+x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,\sin)$
17. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$, $f(g)=g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$
18. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$, $f(g)=h:x\mapsto g(a+x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$
19. $E=F=\mathrm{Vect}(\exp\cdot\cos,\exp\cdot\sin)$, $f(g)=g-g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\exp\cdot\cos,\exp\cdot\sin)$.

($<$ 10 minutes)

20. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $F=\mathbb{R}_1[X]$, $f(P)=R$, reste de la division de P par X^2-3X+2, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=$ b.c.
21. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=(X^2+1)P''-P'$, $\mathcal{B}=(1,(X-1),(X-2)^2,\dots,(X-n)^n$, $\mathcal{C}=$ b.c.

Exercice 7 – Changements de base
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ associé à la matrice A ci-dessous, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, en se servant de la formule de changement de base.
(1 minute)

1. $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$
2. $A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

(2 minutes)

1. $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right)$

(3 minutes)

1. $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=$ b.c.
2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=$ b.c., $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},10\right)$
3. $A=\begin{pmatrix}3&3\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix},-12\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},10\right)$

(6 minutes)

1. $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\2&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $A=\begin{pmatrix}4&2&5\\1&-1&0\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

(10 minutes)

1. $A=\begin{pmatrix}5&1&0\\2&-1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $A=\begin{pmatrix}2&3&6\\3&2&2\\3&0&1\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=$ b.c.
3. $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&1\\4&1&1\end{pmatrix}$ $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 8 – Diagonalisation

Lorsque c'est possible, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $M=PDP^{-1}$:

1. (1 minute)
$$M_1=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\qquad M_2=\begin{pmatrix}-1&4\\6&1\end{pmatrix}\qquad M_3=\begin{pmatrix}5&-1\\6&0\end{pmatrix}\qquad M_4=\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$$
2. (8 minutes)
$$M_5=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad M_6=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-5&4\\2&-7&6\end{pmatrix}\qquad M_7=\begin{pmatrix}0&9&3\\-4&13&2\\2&-2&5\end{pmatrix}\qquad M_8=\begin{pmatrix}-2&6&2\\-2&5&1\\-2&3&3\end{pmatrix}$$
$$M_9=\begin{pmatrix}6&-2&-2\\6&-1&-4\\3&-2&1\end{pmatrix}\qquad M_{10}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix}\qquad M_{11}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\qquad M_{12}=\begin{pmatrix}-17&12&-88\\-24&17&-132\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
3. (15 à 20 minutes)
$$M_{13}=\begin{pmatrix}4&-2&-2&2\\0&4&0&0\\-3&-3&5&3\\-1&-3&1&7\end{pmatrix}\qquad M_{14}=\begin{pmatrix}3&-2&0&0\\0&2&0&0\\2&-4&1&-2\\0&0&0&3\end{pmatrix}\qquad M_{15}=\begin{pmatrix}-3&2&2&0\\-2&1&2&0\\-2&-2&1&0\\-2&2&0&1\end{pmatrix}\qquad M_{16}=\begin{pmatrix}7&-1&2&-3\\1&5&2&-3\\0&0&6&0\\1&-1&2&3\end{pmatrix}$$