Algèbre 3 – Diagonalisation, réduction

Exercice 1 – Déterminer les valeurs propres des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est M. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer M^n, ainsi qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $N^2 = M$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n.

Exercice 3 – Les deux matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer $\mathrm{Spec}(u)$.

Exercice 5 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 – Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle, alors $E_\lambda \subset \mathrm{Im}\, f$.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$.

Exercice 8 – (codiagonalisation)
Étant donné un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, et une valeur propre λ de E, on note $\mathrm{SEP}(f, \lambda)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.
Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-ev E.

1. On suppose que $uv = vu$
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v et que les sous-espaces propres de v sont stables par u.
   (b) Soit, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, v_λ l'endomorphisme de $\mathrm{SEP}(u, \lambda)$, obtenu par restriction de v à cet espace. Montrer que si μ est valeur propre de v_λ alors μ est aussi valeur propre de v, et que dans ce cas,
   $$\mathrm{SEP}(v_\lambda, \mu) = \mathrm{SEP}(v, \mu) \cap \mathrm{SEP}(u, \lambda).$$
   (c) Montrer que
   $$\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(v)} (\mathrm{SEP}(v, \mu) \cap \mathrm{SEP}(u, \lambda)) = \left(\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(v)} \mathrm{SEP}(v, \mu) \right) \cap \mathrm{SEP}(u, \lambda),$$
   et en déduire que v_λ est diagonalisable.
   (d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u et la matrice de v sont diagonales.

2. On suppose maintenant qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u et la matrice de v sont diagonales. Montrer que $uv = vu$.

Exercice 9 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable. **Exercice 10** – Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 4, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\ f$ et de $\mathrm{Ker}\ f$.
2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$ non nul. Montrer que y est un vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée ?
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.
3. Diagonaliser B.

Exercice 11 – (d'après oral ESCP) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B, et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ?
4. En utilisant une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B, justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de B.
   (a) On pose pour tout $n \geqslant 2$, $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$, où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$.
   Justifier l'existence et l'unicité de Q_n et R_n, et déterminer R_n.
   (b) En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geqslant 0$.
   (c) Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, B et n qui a été obtenue pour $n \geqslant 0$ est encore valable pour les entiers négatifs.

Exercice 12 – (Oral HEC) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on considère la matrice :

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne se déduit de la précédente par une permutation circulaire, consistant en un décalage d'un rang vers la droite, et retour en tête de l'élément final de la ligne précédente. Une telle matrice est appelée matrice circulante.

1. On considère la matrice $J = C(0, 1, 0 \dots, 0)$.

   (a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer J^k et montrer que $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ s'exprime comme une combinaison linéaire des J^k.
   (b) Soit $C_n = \{C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{C}\}$. Montrer que C_n est un espace vectoriel, et déterminer sa dimension.
2. (a) Déterminer les valeurs propres complexes de J et les sous-espaces propres correspondants.
   (b) Montrer que $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est diagonalisable, déterminer Γ une matrice diagonale semblable à $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et déterminer les valeurs propres de $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Exercice 14 – (d'après oral HEC) – Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$. Les déterminer.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Retrouver 1.
3. Diagonaliser M. Retrouver 1.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M + I_3)^n$. Retrouver à l'aide de ce calcul le résultat de la question 1.

Exercice 15 – (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit u un endomorphisme diagonalisable de E. On pose :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid uv = vu\}$$

Soit v un endomorphisme de E.

1. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si $uv = vu$, alors v laisse stable les sous-espaces propres de u.
3. Réciproquement, montrer que si v laisse stable les sous-espaces propres de u, alors $uv = vu$.
4. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction des dimensions des sous-espaces propres de u.

Exercice 16 – (Oral HEC 2009)

1. *Question de cours :* Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ (en posant degré$(0) = -\infty$).

2. On considère la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
   Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.
3. On pose $P_1 = X^2 - 1, P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
   On note $V_1 = \text{Vect}(P_1)$, $V_2 = \text{Vect}(P_1, P_2)$
4. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.
   Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$. En déduire que f^3 est nulle, puis préciser l'ensemble des valeurs propres de f.
5. Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.
6. On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par f c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.
   (a) Montrer que E et $\{0\}$ sont stables par f.
   (b) Soit D une droite vectorielle stable par f et $u \in D$ un vecteur non nul. Montrer que u est un vecteur propre de f. En déduire que $D = V_1$.
   (c) Soit F un plan stable par f et $\nu = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ un élément de F. Montrer que $(\nu, f(\nu), f^2(\nu))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $F = V_2$.

Exercice 17 – *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *canoniquement associé à* A.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer des bases de $\text{Ker}(f - \text{id})$, $\text{Ker}(f - \text{id})^2$ et $\text{Ker}(f - \text{id})^3$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Calculer M^n, puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 – (EDHEC 2006)
Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id *(respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^m$, et on considère un endormorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant $(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.*

1. (a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \mathrm{id}) - (f - \lambda_2 \mathrm{id})) = \mathrm{id}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id})$.
   (c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas)

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.
3. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.
   (a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-\mathrm{i}$.
   (b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$.
   On note E_{i} et $E_{-\mathrm{i}}$ les sous-espaces propres de A associées aux valeurs propres i et $-\mathrm{i}$.
   Montrer que $X \in E_{\mathrm{i}} \Longleftrightarrow \overline{X} \in E_{-\mathrm{i}}$.
   (c) En déduire que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $E_{-\mathrm{i}}$. Conclure que $\dim E_{\mathrm{i}} = \dim E_{-\mathrm{i}}$.
   (d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 19 – (HEC 2010)
Soit a, b, c, α quatre nombres réels tels que $a \neq b$ et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$f(P) = (X - a)(X - b)P' + \alpha(X - c)P.$$

1. Question de cours : Equations différentielles $h'(x) = h(x)g(x)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$ (en attribuant au polynôme nul le degré $-\infty$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
   Dans toute la suite du problème, on suppose cette condition réalisée et on note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit λ un réel.
   (a) Trouver deux réels A et B indépendants de x, qu'on exprimera en fonction de n, a, b, c, λ, tels que :
   $$\forall x \notin \{a, b\}, \quad \frac{nx - nc + \lambda}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}.$$
   (b) Donner toutes les valeurs de λ telles que $(x - a)^A (x - b)^B$ soit un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.
   f_n est-il diagonalisable ? f_n est-il bijectif ?

Exercice 20 – (QC HEC 2010)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ tel que :

$$(f - \mathrm{Id})^3 \circ (f - 2\mathrm{Id}) = 0 \qquad \text{et} \qquad (f - \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\mathrm{Id}) \neq 0.$$

Étudier la diagonalisabilité de f.