Algèbre 3 – Formes bilinéaires, produits scalaires

Exercice 1 – Les applications ci-dessous sont-elles des formes bilinéaires ? Si oui, sont-elles symétriques ? définies ? positives ?

1. E l'espace vectoriel des séries convergentes à coefficients réels, $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi \left(\sum a_n, \sum b_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

2. De même si E est l'espace vectoriel des séries convergentes à termes positifs
3. $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $\forall (M, N) \in E$, $\Phi(M, N) = {}^t X {}^t M N X$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = f \circ g(0)$.

Exercice 2 – Dans tous les cas suivants, déterminer si φ est une forme bilinéaire sur E . Le cas échéant déterminer si elle est symétrique, définie, positive, et exprimer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{C}$, par deux méthodes.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 4xx' - xy' + x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 4xx' - xy' - x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 4xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = xx' - xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = xx' - xy' + yz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
6. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = xx' + yy' - 2xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 3 – Soit $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'application $(u, v) \mapsto \operatorname{Re}(u\bar{v})$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. Quelle est sa norme euclidienne associée ?

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = - \int_0^1 P(x)Q''(x) dx$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E . Expliciter la norme euclidienne associée.

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$Q_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

1. (a) Vérifier que pour tout couple (i, j) d'entiers de $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) En déduire que $(Q_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de E .

2. Démontrer que l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=0}^n A(x_i)B(x_i)$$

est un produit scalaire sur E , et que $(Q_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base orthonormale de E pour φ .

3. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de E dans cette base ?

Exercice 6 – (Oral ESCP) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. Démontrer que la famille des applications f_k de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, définies par

$$f_k(x) = e^{a_k x},$$

pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est libre dans l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

2. Soit f une application élément de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, strictement positive. On pose, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$a_{i,j} = \int_a^b e^{(i+j)t} f(t) dt.$$

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, et on considère l'application φ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = {}^t X A Y,$$

où X et Y sont les matrices de coordonnées respectives de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Prouver que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7 – Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

1. Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites appartenant à ℓ^2 , la série de terme général $|u_n v_n|$ converge.

2. Démontrer que ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Pour toutes suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^2 , on note $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

Démontrer que l'application $\varphi : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est un produit scalaire sur ℓ^2 .

4. Démontrer que pour toutes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ^2 ,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2}.$$

Exercice 8 – Montrer que les applications N ci-dessous définissent des normes sur E . Ces normes sont-elles euclidiennes ?

$$1. E = \mathbb{R}^n, \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, N(X) = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$2. E = \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], N(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^n P^2(k)}.$$

Exercice 9 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

$$1. \text{ Montrer que } n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$n \leq \sum_{i=1}^n 2^k \sqrt{i} \leq n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$

Exercice 10 – Soit f une application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{1}{\int_0^1 f(t) dt}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité. **Exercice 11** – Les formes

bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ dont les matrices M_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont-elles des produits scalaires ?

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

5. $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $M_7 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

8. $M_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

9. $M_9 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 12 – Montrer que les applications suivantes définissent des normes. Sont-elles euclidiennes ? Si oui, déterminer le produit scalaire associé.

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\Phi(X) = |x_1| + \dots + |x_n|.$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $\Phi(X) = \sqrt{x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz + 2yz}$

3. $E = \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(X) = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$ (on pourra admettre l'inégalité triangulaire, provenant de l'inégalité de Hölder).

4. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$, $\Phi(P) = \sqrt{P(a)^2 + P'(a)^2 + \dots + P^{(n)}(a)^2}.$

5. $E = C^0([0, \pi])$, $\Phi(f) = \left(\int_0^\pi f^2(t) \sin t dt \right)^{\frac{1}{2}}$

6. $E = C^0([0, \pi])$, $\Phi(f) = \left(\int_0^\pi f^4(t) \sin t dt \right)^{\frac{1}{4}}.$

Exercice 13 – Soit φ_i les formes bilinéaires canoniquement associées aux matrices M_i suivantes. Justifier que $X \mapsto \sqrt{\varphi(X, X)}$ définit une norme euclidienne, et déterminer le produit scalaire associé.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & -5 \\ 1 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 14 – (Extrait de ESCP 1999)

Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k , on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k . À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de $2n + 1$ réel, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante :

• pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, avec :

$$A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^n b_j X^j,$$

on pose : $\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j s_{i+j}$;

• pour tout polynôme C élément de E_{2n} , avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose : $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$.

1. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.
- (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément $(A, B) \in E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$.
(On commencera par considérer le cas où $A = X^i$ et $B = X^j$, avec $0 \leq i, j \leq n$).

2. Deux cas particuliers

- (a) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2).$$

En déduire une condition nécessaire portant sur les réels s_1 et s_2 , pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

- (b) Dans cette sous-question, on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$, et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2 , associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

Exercice 15 – Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$,

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Déterminer dans chacun des deux cas quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité est une égalité.
(Indication globale : on pourra introduire un produit scalaire)

Exercice 16 – (ESCP 2008)

1. Soit $(A, B) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et que

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A.$$

2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1} .
3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
 - (a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$.
 - (b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17 – (QC ESCP 2009)

Soit $n \geq 2$, E un espace euclidien de dimension n . Soit $(e_1, \dots, e_n)$, n vecteurs unitaires de E tels que pour tout $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = 1$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Exercice 18 – (QC ESCP 2010)

Soit E un espace euclidien de dimension n , avec $n \geq 2$. On suppose qu'il existe $n + 1$ vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ tels que pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle < 0$.

1. Montrer, en utilisant la norme de u , que si $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, alors $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| e_k = 0$.
2. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E .