Algèbre 5 – Orthogonalité

Exercice 1 – Les familles suivantes sont-elles des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) ? Sont-elles orthonormales ?

$$1.\ \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \qquad 2.\ \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 2 – Déterminer une base de l'orthogonal de F dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}^5$, ps canonique, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$, $F = \text{Vect}(X, X^2+1)$.

Exercice 3 –

1. Déterminer un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ pour ce produit scalaire. On pourra exprimer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. On demande de plus que $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Déterminer un produit scalaire convenable.
3. On demande en plus de l'hypothèse de la question 1 que $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Peut-on trouver un tel produit scalaire ?

Exercice 4 –

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$ dont on exprimera la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{C}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Justifier qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 5 – Déterminer une base orthonormale du sous-espace F de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^4$, ps canonique, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$, $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$.

Exercice 6 – Soit, F le sev de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal Y de X sur F.

Exercice 7 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 8 – Soit Q l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad Q(X) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $Q(X) \geqslant 0$.
2. On définit, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $N(X) = \sqrt{Q(X)}$. Montrer que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à N.

Exercice 9 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 10 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre).

1. Vérifier que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par
$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur E.
On suppose désormais E muni de ce produit scalaire, et on note $\Phi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.
2. Calculer Q_0, Q_1, Q_2.
3. Déterminer les éventuelles racines de P_n, ainsi que leur ordre de multiplicité.
4. Déterminer le degré de Q_n et son coefficient dominant.
5. Prouver, par récurrence sur k, que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.
6. À l'aide d'intégrations par parties, prouver que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$,
$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} P_n^{(n-m)}(t)\ \mathrm{d}t.$$
En déduire que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Q_n\|$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $W_k = \dfrac{Q_k}{\|Q_k\|}$. Démontrer que $(W_0, \ldots, W_n)$ est une base orthonormale du sev $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathbb{R}[X]$, et que cette base est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

Exercice 11 – Trouver une base orthonormale de $F_i^\perp$ dans les cas suivants :

1. $F_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
3. $F_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathbb{R}^4$
4. $F_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
5. F_5 plan d'équation $x - 2y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$
6. F_6 sev d'équations $x - y - 2z + t = 0$ et $2x - z + 3t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$
7. $F_7 = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du ps $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 12 – Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F_i :

1. $F_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $F_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $F_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $F_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
5. $F_5 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
6. $F_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

7. F_7 hyperplan d'équation $2x - y - z + 2t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$
8. F_8 sev d'équations $x - 2y - t - u = 0$ et $2x - z + t = 0$ dans $\mathbb{R}^5$.
9. $F_9 = \text{Vect}(X - 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du ps $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.
10. $F_{10} = \text{Vect}(X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du ps $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 13 – Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ soit égale à ${}^tP \cdot P$. En déduire que la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible.

Exercice 14 –
Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in N}$ telles que la série de terme général u_n^2 , $n \in N$ converge.
On rappelle (voir feuille 3) que le produit terme à terme de deux suites de ℓ^2 est encore dans ℓ^2, que ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 par :

$$\forall (u, v) \in \ell^2, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Soit F l'ensemble des suites de E nulles à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2.
2. Pour tout entier naturel i, on désigne par e_i la suite de E dont tous les termes sont égaux à 0 sauf le terme d'indice i qui est égal à 1. Vérifier que pour tout $i \in \mathbb{N}$, e_i appartient à F et en déduire que F n'est pas de dimension finie.
3. Démontrer que toute suite appartenant à F est combinaison linéaire d'un nombre fini de suites de la famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
4. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F dans ℓ^2 et vérifier que $F \oplus F^\perp$ est distinct de ℓ^2. Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 15 – Soit E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$, et telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t$ converge absolument.

1. Montrer que si f et g sont dans E, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[0, A]$, et faire tendre A vers $+\infty$.
2. En déduire que E est un espace vectoriel, et que $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
3. Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est élément de E.
4. Déterminer une base orthonormale de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$

Exercice 16 – On rappelle que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{Tr}(\ {}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une base orthonormale, pour ce produit scalaire, de l'espace engendré par la famille (M_1, M_2, M_3) définie par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra à cet effet expliciter $\langle A, B \rangle$ à l'aide des coefficients de A et de B.

Exercice 17 – **(Polynômes de Tchebychev)**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\ \mathrm{d}t$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k. \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$

4. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 18 – (Polynômes de Jacobi)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P, Q de E, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.
   (b) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit φ définie sur E par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.
3. Déterminer les valeurs propres de φ, notées $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, ordonnées par ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre associé à λ_k ; déterminer le degré de P_k Montrer que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
4. Soit $k \geqslant 1$. Montrer que P_k possède au moins une racine d'ordre impair dans $]-1, 1[$.
   Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $]-1, 1[$ et $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$.
   Du calcul de $\langle S, P_k\rangle$, déduire que P_k possède k racines simples toutes dans $]-1, 1[$.

Exercice 19 –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M_λ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$. On assimile les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à des vecteurs colonnes, et on note Φ_λ l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie par : $\Phi_\lambda(X, Y) = {}^tXM_\lambda Y$.

1. Montrer que Φ_λ est une forme bilinéaire.
2. Écrire, pour $X \in \mathbb{R}^3$, le réel $\Phi_\lambda(X, X)$ comme combinaison linéaire de 3 carrés.
3. En déduire que Φ_λ est un produit scalaire si et seulement si $\lambda \in]-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}[$.

Soit λ une valeur telle que Φ_λ soit un produit scalaire. On note $\|-\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

4. Déterminer $\|e_1\|$, $\|e_2\|$ et $\|e_3\|$.
5. Déterminer une base orthonormale (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$, au sens du produit scalaire Φ_λ, en orthonormalisant la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par le procédé de Schmidt.
6. Déterminer le projeté orthogonal (au sens de Φ_λ) de e_3 sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
7. En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale (au sens de Φ_λ) sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Exercice 20 – (EDHEC 2003)

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice J, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associe le réel $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

2. Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.
3. *On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2).*
   (a) Déterminer une base orthonormale de E, notée (K_0, K_1, K_2), telle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i (avec bien sûr $J^0 = I$).
   (b) Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.
   Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, déterminer $\langle K_i, A\rangle$ en fonction de certains des éléments de A.
   (c) On note p la projection orthogonale sur E. Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A.
   (d) En déduire une base de $\mathrm{Ker}\, p$.