Analyse 1 – Suites numériques : Révisions

Exercice 1 – Étudier la convergence des suites définies par les récurrences ci-dessous :

(a) $u_0 \geqslant \dfrac{-3}{2},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ (b) $u_0 > 0,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2}$ (c) $u_0 \neq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$

(d) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$ (e) $u_0 \neq -5,\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ (f) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 2 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$, puis que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que $x_n - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Exercice 3 – (EDHEC 95)

0. Préliminaire : on rappelle que si (u_n) est une suite réelle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. En déduire que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite a, strictement positive, alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geqslant \frac{a}{2}$. Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x(1-x)$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Étudier les variations de f.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.
3. On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}.$$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Montrer à l'aide de la question 2(b) que : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?

5. On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.

Exercice 5 – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et justifier que la convergence est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $+\infty$, puis une expression de S_n à $o(1)$ près en fonction de la limite α de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée par ses deux termes initiaux u_0 et u_1, et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels fixés.

1. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que pour tous complexes λ et μ, la suite complexe $(\lambda r^n + \mu s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer qu'il existe un et un seul couple (λ, μ) de nombres complexes tels que $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r + \mu s = u_1$. Montrer qu'alors, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$.
   (c) Soit $(u_n)_s u$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (d) Même question avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).
   (e) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
2. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet une racine double $r \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tous complexes λ et μ, la suite complexe $((\lambda + \mu n)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer qu'il existe un et un seul couple (λ, μ) de nombres complexes tels que $\lambda = u_0$ et $(\lambda + \mu)r = u_1$. Montrer qu'alors, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.
   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
   (d) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 7 – Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est pair si et seulement si n est multiple de 3.

Exercice 8 – (d'après Ecricome 2005)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1,\quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x).$$
   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis, en remarquant que, pour tout entier n non nul,
   $$1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}},$$
   en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.

   Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geqslant N_0$, alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \frac{1}{2}$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
5. Écrire en langage PASCAL une fonction ayant pour nom `suite` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.
6. (Question ajoutée)
   (a) Quelle est, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n^α ?
   (b) Quelle est, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n^\alpha$? On précisera les cas de convergence absolue et de semi-convergence.

Exercice 9 – (Étude d'une suite définie implicitement)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} - x^2$.

1. Définition de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Montrer que f_n ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
   (b) Déterminer f_n', et justifier que f_n' s'annule sur $\mathbb{R}$ en une unique valeur α_n.
   Justifier que $0 < \alpha_n < 1$.
   (c) Justifier que f_n s'annule sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ en une unique valeur β_n, et que $\beta_n > \alpha_n$.

2. Étude de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Déterminer le signe de $f_n(\beta_{n+1})$, et en déduire que (β_n) est monotone.
   (b) (β_n) est-elle convergente ? Déterminer sa limite.
   (c) En utilisant un équivalent du sinus, déterminer un équivalent simple de β_n.

3. Étude de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Quelle est la limite de $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$? Justifier que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
   (b) Justifier que $2\alpha_n - \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n^5}$. En déduire un développement limité à l'ordre 5 de α_n.
   (c) En utilisant un développement limité du cosinus, en déduire un développement limité à l'ordre 7 de α_n.
   (d) En déduire enfin que $\alpha_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^5} + \frac{13}{768n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)$.
   (e) Justifier rapidement qu'en itérant cette méthode, on pourrait déterminer le développement limité à tout ordre de α_n, et que ce développement limité ne contient que des termes d'ordre $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Étude de quelques séries définies à l'aide de α_n et β_n.
   (a) Déterminer, suivant la valeur de $\gamma \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général α_n^γ et de la série de terme général β_n^γ.
   (b) Soit (S_n) la somme partielle de la série de terme général $(-1)^n \beta_n$. En utilisant les variations de (β_n), montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et en déduire que $\sum (-1)^n \beta_n$ converge.
   (c) En étudiant la convergence des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^5}$, et en utilisant le développement limité de α_n, montrer, sans déterminer les variations de α_n, que $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente.
   (d) Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \alpha_n^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 – (ESCP 2010)

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire la définition mathématique de la convergence de la suite (a_n) vers ℓ/

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

(a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

(b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}\right)$ existe et est un réel non nul.

(c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 11 – (ESCP 2010)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des involutions de $[\![1,n]\!]$
On rappelle qu'un application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ *est une involution si et seulement si* $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

1. On pose $d_0 = 1$.
   (a) Calculer d_1, d_2, d_3.
   (b) Montrer que : pour tout $n \geqslant 2$, $\quad d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.
   (c) Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `Function D(n :integer) :integer;` permettant de calculer d_n.
2. On pose, pour tout réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Prouver l'existence d'un développement limité pour f à tout ordre n au voisinage de 0.

   On peut donc définir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_n soit le coefficient de x^n dans le développement limité, à un ordre au moins égal à n, de f. On a ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \displaystyle\sum_{\substack{p+2q=n \\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q q!}$.
   (c) Montrer que la dérivée f' de f admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de 0 et le déterminer à l'aide des coefficients a_k.
   (d) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = a_n n!.$$

Exercice 12 – (QC HEC 2009) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$.

1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}$.
3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.