## Analyse 1bis – Plus d'exercices sur les suites

**Exercice 1** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\left(\dfrac{a^n}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si $a < 1$ ; vers $+\infty$ si $a > 1$. Cas $a = 1$ ?
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**Exercice 2** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel fini $\ell$. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit ou un plus grand élément. Décrire les suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas à la fois un plus petit et un plus grand élément.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, et qu'elle tend vers 0. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_p$.

**Exercice 3** – *On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et la fonction $g$ définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.*
*L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 1$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Étudier le sens de variation de $g \circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite $\ell$.
5. Vérifier que $\ell$ est un point fixe de $f$ et de $g$.
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, $f$ et $g$. En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

**Exercice 4** – Soit $a \in ]1, +\infty[$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^a} + \dfrac{1}{3^a} + \cdots + \dfrac{1}{n^a}$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = S_{2^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n(a-1)}}$.
   En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $\ell$ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la convergence est en $O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$, c'est-à-dire : $|S_n - \ell| = O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$.

**Exercice 5** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les deux encadrements suivants :
$$2 \leqslant u_n^2 - u_{n-1}^2 \leqslant 2 + u_n - u_{n-1} \qquad \text{puis} \qquad 2n \leqslant u_n^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1.$$
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2n}{u_n^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{u_n^2}$.
6. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 6** – (Oral HEC 1991) – Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines $\alpha_n$ et $\beta_n$ de $f_n$ telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite $\ell$.
   (c) En remarquant que pour tout $n \geqslant 3$, $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, trouver un équivalent de $\ln(\beta_n)$, et en déduire que $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

**Exercice 7** – Autour de la suite de Fibonacci.

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)$ par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.
2. Montrer que $F_n$ est croissante, et que pour tout $n$, $F_n \geqslant n - 1$. Quelle est la limite de $F_n$ ?
3. Montrer par récurrence les relations suivantes :
   (a) $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
   (b) $\forall n \geqslant 1,\ F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n}$ et $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ (démontrer les deux relations dans la *même* récurrence).
   (c) $\forall n \geqslant 0,\ \forall p \geqslant 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} F_{n+k} = F_{n+2p}$. Expliciter la relation obtenue pour $p = 2$.
   (d) $\forall n \geqslant 1,\ F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.
4. (*** dur dur ***) Montrer que pour tout $n$, $F_{n+2}^3 + F_{n+1}^3 - F_n^3$ est un nombre de Fibonacci (on calculera cette expression pour des petites valeurs de $n$, et on comparera avec les valeurs de la question 1, afin de trouver une conjecture, qu'on démontrera ensuite par récurrence).
5. Montrer que tout entier $n \geqslant 0$ s'écrit de manière unique comme une somme de nombres de Fibonacci *distincts* et *non consécutifs* (récurrence sur $n$ ; considérer $n - F_k$, où $F_k$ est le plus grand nombre de Fibonacci inférieur à $n$ ; on justifiera soigneusement l'existence d'un tel $k$). Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Zeckendorf.* La décomposition de $n$ obtenue est appelée *décomposition de $n$ dans la base de Fibonacci.*
6. (*** dur ***) Application : un jeu d'allumettes.
   Deux joueurs tirent à tour de rôle des allumettes d'une boîte, avec les règles suivantes :
   • Chaque joueur tire à chaque fois au moins une allumette.
   • Le premier joueur ne retire pas la totalité des allumettes au premier tour.
   • Un joueur tire au plus deux fois le nombre d'allumettes tirées par le joueur précédent.
   • Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.
   Montrer que le premier joueur a une stratégie gagnante si le nombre initial d'allumettes n'est pas un nombre de Fibonacci, et que cette stratégie consiste à tirer à chaque étape le plus petit terme de la décomposition dans la base de Fibonacci (vérifier qu'à chaque étape, le joueur 2 ne peut pas gagner, et que le joueur 1 sera à chaque étape en mesure de tirer de la sorte).
   Que dire du cas où le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci ?

**Exercice 8** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell$ (fini ou infini) , et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que $v_n = u_{f(n)}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 9** – Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \qquad w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et minorées par 0.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in ]-1,+\infty[$, $\dfrac{t}{t+1} < \dfrac{t+1}{t+2}$.

   (b) En considérant $u_n^2$, et en remarquant que $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)u_n}$, établir alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$

3. (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

   (b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
4. En considérant la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, établir enfin que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\lambda}{2n}} \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda n}}.$$

**Exercice 10** – Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\dfrac{2n}{3} + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

En déduire la limite quand $n$ tend vers l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

**Exercice 11** – Soit $H_n$ la suite harmonique, définie par :

$$H_0 = 0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{k+1}{m+1} = \dfrac{1}{m+1}\dbinom{k}{m}$.

   On rappelle que par convention, $\dbinom{n}{p}$ est nul si $p > n$.
2. Montrer chacune des égalités suivantes :

   (a) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right)$,

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$,

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$.

**Exercice 12** –

1. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

   (a) Calculer $I_0$ et $I_1$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

   (c) En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

(d) Étudier le sens de variation de $I_n$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$.

(e) En déduire la limite de $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

(a) Soit $u_n = S_n - S_{n-1}$. Montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(On pourra utiliser un développement limité du logarithme)

(b) En déduire que $S_n$ admet une limite finie $S$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$. En calculant de deux manières la limite de $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de $S$.

(d) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$.