

### Analyse 2 – Séries numériques : Révisions

**Exercice 1** – Nature des séries de terme général  $u_n$  :

- |                                                                              |                                                   |                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{\ln n}{n^5}$                                                 | 8. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$                     | 15. $u_n = a^{-n^\alpha}, a > 0$                              |
| 2. $u_n = e^{-\sqrt{5+n}}$                                                   | 9. $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$ | 16. $u_n = \frac{1}{n^{\ln n}(\ln n)^n}$                      |
| 3. $u_n = \frac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}}$                                        | 10. $u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$             | 17. $u_n = \frac{n^n}{n! a^n},  a  \neq e, a \neq 0$          |
| 4. $u_n = \ln\left(\frac{3 + \sin \frac{1}{n}}{3 - \sin \frac{1}{n}}\right)$ | 11. $u_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$           | 18. $u_n = \frac{1}{n} \ln n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ |
| 5. $u_n = \frac{n + e^{-n}}{(n+1)^3}$                                        | 12. $u_n = \frac{1}{e^{(2+\frac{3}{n}) \ln n}}$   | 19. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$                |
| 6. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$                                    | 13. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$                       | 20. $u_n = \ln(\cos \frac{1}{n})$                             |
| 7. $u_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2 \sqrt{n}}$                                | 14. $u_n = \sin n$                                | 21. $u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln n$                               |

**Exercice 2** – Nature et somme éventuelle des séries suivantes :

- |                                                                         |                                                                 |                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \cdot \frac{1}{n!}$                   | 3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 2n - 1) \cdot \frac{1}{2^n}$ | 5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4^n}{(2n)!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^3 + 2n^2 - 3n - 1) \cdot \frac{2^n}{n!}$ | 4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)3^n}$              | 6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \frac{\cos(e^{-(n+1)})}{\cos(e^{-n})}$                               |

**Exercice 3** – Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réel positifs. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , alors la série  $\sum a_n$  est convergente.
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$  et  $\sum a_n$  est convergente, alors la série  $\sum b_n$  est convergente.
- Si la série de terme général  $\inf\left(a_n, \frac{1}{n}\right)$  est convergente, alors la série  $\sum a_n$  est convergente.
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \dots + a_{2n}) = 0$ , alors la série  $\sum a_n$  est convergente.

**Exercice 4** – Soit pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , et  $u_n = S_n - \ln n$ .

- Montrer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge.
- En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite  $C \in \mathbb{R}_+$ . Ce réel  $C$  est appelée *constante d'Euler*.
- Donner un équivalent simple de  $(S_n)$ .

**Exercice 5 – (Oral HEC)** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_1 = 1$  et :

$$\forall n > 1, u_n = \left(\frac{1}{n} + u_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Étudier le signe, la monotonie et la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- Donner un équivalent simple de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- Déterminer la nature de la série de terme général  $v_n = \frac{1}{nu_n^2}$ .
- Donner un programme en Pascal permettant de calculer  $u_n$  pour  $n$  allant de 1 à 50.

**Exercice 6** – Soit  $a > 0$ , on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{n^{a-1}(n!)}$ .

1. Étudier la convergence de la série de terme général  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  a une limite strictement positive.

**Exercice 7** – Nature des séries de terme général  $u_n$  :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad u_n &= \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} & (b) \quad u_n &= (-1)^n e^{\sqrt{6n+5}-n} & (c) \quad u_n &= \frac{\ln n + (-1)^n 10 \ln(\ln n)}{\sqrt{n}} \\
 (d) \quad u_n &= (-1)^n e^{\frac{1}{n}} & (e) \quad u_n &= \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} & (f) \quad u_n &= \ln n \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \\
 (g) \quad u_n &= \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} & (h) \quad u_n &= (-1)^n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} & (i) \quad u_n &= \frac{(-1)^n \ln n + 1}{n \ln n} \\
 (j) \quad u_n &= \frac{n+1}{\sqrt{n} - (-1)^n \cdot n} & (k) \quad u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

**Exercice 8** – Nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^6 n} \quad \sum \frac{(-1)^n}{E(n + \sin n)} \quad \sum n - n^2 \sin \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{6} \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

**Exercice 9** – Le but de cet exercice est de montrer que la série  $\sum \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$  diverge.

1. Soit, pour  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n = E \left( \left( -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)^2 \right)$  et  $\beta_n = E \left( \left( \frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)^2 \right)$ . Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $\alpha_n < k \leq \beta_n$ . Minorer  $\cos \sqrt{k}$ .
2. En déduire que  $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\cos \sqrt{k}}{\sqrt{k}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2n\pi^2 - 1}{\frac{\pi}{4} + 2n\pi}$ .
3. En déduire que la série  $\sum \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$  diverge.

**Exercice 10** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin u_n$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
2. En étudiant la série de terme général  $u_n - u_{n+1}$ , montrer que la série de terme général  $u_n^3$  est convergente.
3. Montrer que les séries de termes généraux :  $\ln \frac{\sin u_n}{u_n}$  et  $u_n^2$  sont divergentes.
4. Étudier la convergence de la série  $\sum u_n x^n$  pour toutes les valeurs du réel  $x$ .

**Exercice 11** –

1. En adaptant la méthode de comparaison d'une série et d'une intégrale, déterminer un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , dans le cas où  $\alpha \leq 1$ .
2. Même question pour  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .
3. Même question pour  $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ .

**Exercice 12** – Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_n(x) = x^{k+1} + x^k - n = 0$  admet une unique solution  $x_n$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Étudier les variations de  $x_n$  (on pourra s'aider du signe de  $f_{n+1}(x_n)$  et des variations de  $f_{n+1}$ ).
3. Étudier la limite éventuelle de  $(x_n)$ .
4. Justifier que  $x_n + 1 \underset{+\infty}{\sim} x_n$  puis que  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{k+1}}$ .
5. Pour quelles valeurs de  $k$  la série de terme général  $\frac{1}{x_n}$  est-elle convergente?
6. Même question pour la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{x_n}$ .

**Exercice 13** – (Écricome 2007)

1. À l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque  $x$  est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{\frac{1}{k}} \in ]0, 1[.$$

- (b) En déduire le signe de  $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ , pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2.
- (c) Quelle est la nature de la série de terme général  $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$  ?
- (d) Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

3. (a) Montrer que  $\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[ \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$ .

- (b) Déterminer un équivalent, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , de  $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ .
- (c) En déduire que  $u_n$  est équivalent, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , à  $\frac{K}{n}$ , avec  $K > 0$ .  
Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?

4. On pose  $S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$ .

- (a) Donner le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$ .
- (b) Montrer que les deux suites  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$  sont adjacentes.
- (c) En déduire la nature de la série de terme général  $(-1)^n u_n$ .
- (d) Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre un réel  $e$ , et donnant une valeur approchée de  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n u_n$  à la marge d'erreur  $e$  près.  
*On pourra justifier que l'erreur faite au rang  $n$  est majorée par  $u_n$ .*

**Exercice 14 – (Oral ESCP 2009)** Dans tout cet exercice  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose :  $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$ .

1. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_k - na_n$ .
2. On suppose dans cette question que la série de terme général  $a_n$  converge.
  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ .
  - (b) En déduire que la série de terme général  $b_n$  converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. On suppose dans cette question que la série de terme général  $b_n$  converge.
  - (a) Montrer que pour tout  $n$  et  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$ .
  - (b) En déduire que la série de terme général  $a_n$  converge et que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

**Exercice 15 – (Oral HEC 2010)**

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une série convergente. Démontrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette équivalence demeure-t-elle valable pour les séries à termes réels de signe quelconque ?
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles positives.  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\begin{cases} m_n &= \min\{u_n, v_n\} \\ M_n &= \max\{u_n, v_n\} \end{cases}$$

Démontrer que, si les séries  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} v_n$  sont convergentes, les séries  $\sum_{n \geq 1} m_n$  et  $\sum_{n \geq 1} M_n$  le sont aussi, et leurs sommes vérifient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

3. On suppose désormais que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  : 
$$\begin{cases} u_n &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ v_n &= \frac{4}{5^n} \end{cases}$$
  - (a) Démontrer que les deux séries  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} v_n$  sont convergentes, et que leurs sommes sont égales.
  - (b) Prouver que, pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $v_n \leq u_n$ .
4. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les événements  $[X_n = u_n]$  et  $[X_n = v_n]$  soient des parties complémentaires de  $\Omega$ , de même probabilité  $\frac{1}{2}$ .

- (a) Démontrer que, pour tout  $\omega \in \Omega$ , la série  $\sum_{n \geq 1} X_n(\omega)$  est convergente et que sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$  est comprise entre  $\frac{8}{15}$  et  $\frac{22}{15}$ .

- (b) Démontrer que  $\left[ \sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15} \right]$  et  $\left[ \sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1 \right]$  sont des événements de probabilité nulle.

**Exercice 16 –** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{(4n)!}{4^{4n}(n!)^4}$ .

On rappelle que pour toute suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite nulle, on a  $\ln(1 + v_n) = v_n + O(v_n^2)$ .

1. Justifier que  $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2} \ln n$ .
2. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .