

Analyse 2bis – Plus d'exercices sur les séries

Exercice 1 – Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$ convergent
2. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.
3. En déduire que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 3 – (Oral HEC) – Méthode de Stirling pour le calcul approché de $\zeta(3)$.

La fonction ζ de Riemann est définie sur son domaine de définition par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ .

Le but de l'exercice est de trouver une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.

2. (a) Établir que $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \zeta(3) - S_n \leq \frac{1}{2n^2}$.
 (b) Donner une minoration de la valeur minimale n_0 pour laquelle S_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$?
 (c) En admettant une erreur d'arrondi de 10^{-11} sur chaque quotient $\frac{1}{k^3}$, montrer que le calcul effectif de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près est impossible par cette méthode.
3. Déterminer des réels a , b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^3} = \frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$

où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 \varepsilon_n = 0$. Vérifier que :

$$\varepsilon_n = \frac{50n+24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon_n < \frac{50}{n^6}.$$

4. En remarquant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+m)} = \frac{m}{n(n+1) \cdots (n+m)},$$

calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{3}{3 \cdot 3!} + \frac{11}{4 \cdot 4!} + \sum_{k=1}^n \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \zeta(3) - T_n < \frac{10}{n^5}$.

6. Quelle valeur de n_0 suffit-il de prendre pour que T_{n_0} soit une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près ?

Exercice 4 – Nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^6 n} \quad \sum \frac{(-1)^n}{E(n + \sin n)} \quad \sum n - n^2 \sin \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{6} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Exercice 5 – Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)e^{-n} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}.$$

Exercice 6 –

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
1. $\sum_{n \geq 0} \ln n e^{-(n+\alpha)^\beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
1. $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\cos(\frac{1}{n})} - e \right)$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\ln n}, a \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{n \geq 1} \cos^\alpha \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) - 1, \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

Exercice 7 – (Les questions sont indépendantes)

1. Nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}} - e \right)$
2. Nature et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3n^3 - 2n^2 + n - 1}{n!}$
3. Nature et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3}{3^n}$

Exercice 8 – En utilisant les séries dérivées de la série géométrique, justifier la convergence et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \cos((n-1)x) = \frac{(3 - 4 \cos x + 2 \cos^2 x)^2}{(5 - 4 \cos x)^2}.$$

Exercice 9 – Nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \ln n e^{-\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \cos \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \right) - 1, \alpha \in \mathbb{R}^+.$

Exercice 10 – Nature des séries suivantes : $\sum (-1)^n \ln(\ln(n)), \sum \cos \left(\sin \frac{1}{n} \right) - e^{\frac{1}{n^2}}, \sum \frac{1}{E(\ln n)}, \sum (-1)^n \sin \frac{1}{n}.$

Exercice 11 – (Somme par groupements de termes)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, avec $p_0 = 0$, et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{p_n} + \dots + u_{p_{n+1}-1} = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} u_k.$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$ les sommes partielles des séries de termes généraux u_n et v_n .

Le but est de montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et que si elles convergent, leur somme est égale. Autrement dit, on peut sommer une série à termes positifs en groupant d'abord les termes par paquets de termes consécutifs, en sommant sur ces paquets, puis en faisant la somme des résultats obtenus pour chaque paquet.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $T_n = S_{p_{n+1}-1}$.
2. En déduire que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge. Comparer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Utilise-t-on l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ pour cette implication ?
3. Si $\sum v_n$ converge, montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, et en déduire que $\sum u_n$ converge.
4. En déduire que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et que si elles convergent, elles ont même somme.
5. Trouver un contre-exemple à la question 3 lorsque $\sum u_n$ n'est pas à termes positifs.