

Analyse 3 – Intégrales impropres

Exercice 1 – Étudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$
4. $I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$
5. $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$
7. $I_7 = \int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}, \beta \in \mathbb{R}$
8. $I_8 = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t (\ln \ln t)^\beta}, \beta \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 – Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ diverge.

Exercice 3 –

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2+x^3} \right)^n dx$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie, et que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0
Indication : on pourra utiliser la relation de Chasles, en coupant l'intégrale en deux en $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Même question avec $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^5+1)^n}, n \in \mathbb{N}^*.$

Exercice 4 – Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} x \ln x e^{-x^\alpha} \, dx, \alpha \in \mathbb{R}$
3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \, dx$
4. $I_4 = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|}} \, dx$
5. $I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} \, dx$
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \, dx$
7. $I_7 = \int_0^1 \ln x \, dx$
8. $I_8 = \int_0^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x) \, dx$
9. $I_9 = \int_0^{+\infty} (\ln(x^2+1) - \ln x^2) \, dx$
10. $I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|\ln x|}}{\sqrt{x} e^{2x}} \, dx$
11. $I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{|\ln x| \sqrt{x}} \, dx$
12. $I_{12} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} \, dx$
13. $I_{13} = \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}) \, dx$
14. $I_{14} = \int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) \, dx$
15. $I_{15} = \int_3^{+\infty} (\ln(\ln x))^{-\ln x} \, dx$
16. $I_{16} = \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} \, dx.$

Exercice 5 – Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} \, dx$ diverge.

Exercice 6 – Soit f une fonction continue sur $[0, 1[$. On suppose que $\int_0^1 f(x) \, dx$ converge absolument.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x) \, dx$ converge.
2. Soit $\varepsilon > 0$
 - (a) Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_a^1 x^n f(x) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 - (b) Ce a étant choisi, montrer qu'il existe un réel M tel que

$$\left| \int_0^a x^n f(x) \, dx \right| \leq M \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) \, dx = 0$.

Exercice 7 – Nature et valeur des intégrales suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\int_1^{+\infty} \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} \, dt$ | 4. $\int_0^1 t^\alpha \ln t \, dt, \alpha > -1$. | 7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx$ |
| 2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}} \, dx$ | 5. $\int_0^{+\infty} \left(1 - x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) \, dx$ | 8. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$. |
| 3. $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \, dt$ | 6. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \, dx$ | |

Exercice 8 –

1. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n converge.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
 - (c) En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

Exercice 9 – Soit n un entier positif ou nul, et $F_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}$.

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_t sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}$.

1. Domaine de définition de F_n ?
2. On suppose dorénavant que $x > 0$. Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{x}{2}$.
 - (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit M un majorant de f_t'' sur $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$). Justifier que :

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \cdot M.$$

- (b) Calculer f_t', f_t'' .
- (c) Montrer que pour tout y entre x et $x+h$, on a $|f_t''(y)| \leq \frac{2n(t^2 + 4(2n+3)x^2)}{(t^2 + \frac{x^2}{4})^{n+2}}$.
- (d) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{2n(t^2 + 4(2n+3)x^2)}{(t^2 + \frac{x^2}{4})^{n+2}} \, dt$ converge
- (e) En déduire que F_n est dérivable en x et que

$$F_n'(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \, dt = -2nx F_{n+1}(x)$$

3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_1(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} \, dt = \binom{2n-2}{n-1} \frac{\pi}{(2x)^{2n-1}}.$$

Exercice 10 – Après avoir justifié leur convergence, calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} (t^2 - t + 3)e^{-t} dt$
2. $I_2 = \int_2^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$
3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}^3 t e^{-\operatorname{sh} t} dt$
4. $I_4 = \int_0^{+\infty} t^2 \sqrt{t} e^{-3t} dt$
5. $I_5 = \int_{-\infty}^0 (t + t^4) e^t dt$
6. $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t + t^2 + \sqrt{|t|}) e^{-|t|} dt$
7. $I_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-3)^2} dx$
8. $I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+4x-5} dx$
9. $I_9 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-2x+3} dx$
10. $I_{10} = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$
11. $I_{11} = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$
12. $I_{12} = \int_2^{+\infty} e^{-x^2+4x+6} dx$

Exercice 11 – Justifier la continuité des fonctions définies sur un domaine à préciser par :

1. $f_1 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{xt} - 1}{t\sqrt{t}} dt$
(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis entre x et x_0 dans le domaine, pour la fonction qui à x associe $\frac{e^{xt} - 1}{t\sqrt{t}}$ (à t fixé), puis intégrer).
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2 + xt}}$

Exercice 12 – Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes définies sur un domaine à préciser, et exprimer leur dérivée sous forme d'une intégrale (on pourra commencer par utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intégrande, vue comme fonction en x , à t fixé).

1. $f_1 : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} dt$
3. $f_3 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$
4. $f_4 : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t^2} dt$
5. $f_5 : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Exercice 13 – (Étude de la fonction Γ)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} dt$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} dt$.
En déduire la limite de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1} e^{-t}$.

3. Montrer que f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer f'_t et f''_t .
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f'_t(x) \right| \leq \frac{h}{2} M_2(t, x),$$

$$\text{où } M_2(t, x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^{\frac{x}{2}-1} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

(b) Justifier la convergence des intégrales

$$\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{\frac{x}{2}-1} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x dt.$$

(c) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f'_t(x) dt.$$

5. Montrer que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 – Soit F la fonction définie en tout x de $\mathbb{R}$ pour lequel l'intégrale est convergente par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]-1, 1[$
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que F est paire sur $] -1, 1[$. Déterminer $F(0)$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) \geq \int_0^1 \frac{t^x}{2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-2}}{2} dt.$$

(b) En déduire la limite de F en -1 et en 1 .

4. Soit $x \in [0, 1[$, et a un réel tel que $x < a < 1$. Montrer que pour tout y de $[0, a]$, on a :

$$(i) \quad \forall t \in]0, 1[, \quad \left| \frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x) \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2} \right| \leq \frac{(y-x)^2}{2} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}, \text{ et :}$$

$$(ii) \quad \forall t \in [1, +\infty[, \quad \left| \frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x) \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2} \right| \leq \frac{(y-x)^2}{2} \frac{(\ln t)^2 t^a}{1+t^2}.$$

5. Justifier que $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2 t^a}{1+t^2} dt$ sont convergentes
6. En déduire que F est dérivable sur $]0, 1[$, et dérivable à droite en 0 . Exprimer ces dérivées.
7. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, et en déduire que $F'_d(0) = 0$, puis que F est dérivable sur $] -1, 1[$.
8. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t) (t^x - \frac{1}{t^x})}{1+t^2} dt.$$

(b) En déduire les variations et la convexité de F sur $] -1, 1[$.

(c) Tracer l'allure du graphe de F .

Exercice 15 – Montrer que la fonction F suivante est dérivable sur son domaine de définition (qu'on précisera), sauf en 0 (la non dérivabilité en 0 n'est pas à démontrer), et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-tx} dt.$$

Exercice 16 – On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Déterminer, en fonction de sh et ch , les dérivées des fonctions sh , ch et th .
2. Quelles sont les variations de sh ? Déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Quelles sont les variations de th ? Déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

5. Après avoir montré sa convergence, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

On pourra pour cela faire un changement de variables $x = \operatorname{sh} y$.