Analyse 5 – Fonctions de plusieurs variables : continuité, calcul différentiel

Exercice 1 – Domaine de définition et existence d'une limite en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad b)\ f(x,y) = \frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y} \qquad c)\ f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

$$d)\ f(x,y) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y} \qquad e)\ f(x,y) = x^y \qquad f)\ f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}$$

$$g)\ f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad h)\ f(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad i)\ f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Exercice 2 – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous. Étudier l'existence des dérivées partielles et le caractère $\mathcal{C}^1$.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leqslant y; \end{cases} \qquad d)\ f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0; \end{cases}$$

$$e)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad f)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad h)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0; \end{cases}$$

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}$.

Exercice 4 – Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de fg en fonction des dérivées partielles de f et de g.

Exercice 5 – Soient $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de g en fonction de celles de f, u et v.

Exercice 6 – Montrer que la fonction $X \mapsto \frac{X}{\|X\|^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Déterminer son développement limité d'ordre 1 au voisinage de X_0.

Exercice 7 – Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geqslant y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x| \leqslant y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leqslant -y^2. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer qu'il n'existe aucun $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, x', y) \in]-\alpha, \alpha[\times]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[, \quad |f(x,y) - f(x',y)| \leqslant A|x - x'|.$$

Exercice 8 – Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y} \ : \ [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$, et on note :

$$F(x,y) = \sup_{t \in [-1,1]} f_{x,y}(t).$$

1. Montrer que $F(x,y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{4x} & \text{si } x < 0 \text{ et } |y| \leqslant -2x \\ x + |y| & \text{sinon.} \end{cases}$.
2. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$ Le but de l'exercice est de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la limite de g lorsque (x, y) tend vers (x_0, x_0), avec $x \neq y$, est $f'(x_0)$ (ind. : TAF). En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, exprimer $\dfrac{g(x_0 + h, x_0) - g(x_0, x_0)}{h}$ en fonction de f. Déterminer la limite de cette expression à l'aide d'une formule du cours.
3. Pour $x \neq y$ calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ en fonction de (x, y), et déterminer sa limite. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe Ω non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que, pour tout $X \in \Omega$, $\nabla f_X = 0$. Montrer que f est constante.
2. On suppose que l'application $X \mapsto \nabla f_X$ est constante sur Ω et que. Montrer que f est affine sur Ω, c'est-à-dire qu'il existe un réel b tel $f - b$ soit sur Ω la restriction d'une forme linéaire (on pourra utiliser une formule de Taylor centrée en un point $a \in \Omega$)
   Que vaut b lorsque $0 \in \Omega$?

Exercice 11 – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On pose $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$. Montrer que si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u.$$

Exercice 12 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle laplacien de f la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit que f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $z = x + iy$, et $f(x,y) = \ln |\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}|$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, harmonique sur U. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y}$ est harmonique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 13 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues ?

Exercice 14 – Plan tangent en $(0,0)$ des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité) :

1. $f(x,y) = 1 + x - \sqrt{1+x-y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos(x+y)}}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y) - \sin x - \sin y}{xy}$.

Exercice 15 – Développement limité à l'ordre 2 en A des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $A = (0,0)$
2. $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $A = (0,0)$
1. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, $A = (0,0)$
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}\cos y$, $A = (1,0)$

Exercice 16 – Déterminer, si elles existent, toutes les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, telles que

1. $D = (\mathbb{R}^*)^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{2+x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{2+y}{x} \end{cases}$
2. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

Exercice 17 – On considère l'équation différentielle (E) :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

où l'inconnue f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$g(u,v) = f(u,uv).$$
Justifier l'existence de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$. La calculer.
2. En déduire que f est solution de (E) si et seulement si $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$.
Montrer qu'il en est ainsi si et seulement s'il existe deux fonctions k et ℓ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad g(u,v) = uk(v) + \ell(v).$$
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 18 – On se propose de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que la fonction G définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $G(x,y,z) = f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ ait un laplacien nul sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, le laplacien de G étant la fonction définie là où cela est possible par

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}.$$

1. Soit f une solution du problème, montrer alors que la fonction $u \mapsto u\sqrt{1+u}f'(u)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$
En déduire, pour tout $y > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_3^y \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$.
3. Conclure.

Exercice 19 –

1. Soient φ et θ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit (dans cette question uniquement) la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$
Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (1).$$

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, qui vérifie l'équation (1). On définit une fonction g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(u,v) = f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right).$$

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et montrer que

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_2^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \qquad (2).$$

3. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) + \frac{a}{t}h(t) = 0 \qquad (3)$$

   (a) Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est solution de (3).
   (b) Soit h une solution de (3). Montrer que la fonction $t \mapsto t^a h(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est une fonction constante.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (3).

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation (1). Justifier l'existence de deux fonctions θ et φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$

Exercice 20 – (fonctions homogènes)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de deghré α si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (a) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
   (b) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

   (c) On suppose réciproquement que f vérifie la relation de la question précédente. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi : t \mapsto f(tx_1, \dots, tx_n)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

   En déduire que f est positivement homogène de degré α.

2. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}. \quad (*)$$

   (a) Déterminer une solution positivement homogène f_0 de $(*)$.
   (b) Montrer que f est solution de $(*)$ si et seulement si $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

   En déduire que g doit être constante.
   (c) Conclure.