Analyse 5 – Fonctions de plusieurs variables : recherche d'extrema

Exercice 1 – Les fonctions suivantes admettent-elle un extremum (local ou global) sur D ?

1. $D = \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$, $f : (x,y) \mapsto x^4 - 2x \ln y + \operatorname{Arctan}(xy)$
2. $D =]2,+\infty[^2$, $f : (x,y) \mapsto \sqrt{xy} - \operatorname{Arctan}(xy^2)$.

Exercice 2 – Étudier les extrema globaux des fonctions suivantes, définies sur D :

1. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \ln(x^2+y^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \operatorname{Arctan}((x+y+z)\mathrm{e}^{-(x+y+z)})$
3. $D = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$
4. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 6y + 2$
5. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + 1$
6. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = -x^2 - 2xy - 3y^2 - 4$

Exercice 3 – Étudier les extrema (locaux sur l'intérieur, et globaux) des fonctions suivantes, définies sur D :

1. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.
2. $D =]0,\pi[^2$, $f : (x,y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x+y)$
3. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto (x+z^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$.
4. $D = [0,1]^2$, $f : (x,y) \mapsto x^3 - 2x^2y + y^2$
5. D est le triangle (fermé) de sommets $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $f : (x,y) \mapsto 3x^3 - x^2 + 2xy + xy^2$.
6. $D = [-1,1]^3$, $f : (x,y,z) \mapsto x^n + y^n + z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
7. $D = [0,1]^3$, $f : (x,y,z) \mapsto xy^2 + x^2y - 2zy^2 - x + 1$.

Exercice 4 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et déterminer son gradient.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la hessienne de f en tout point (x,y).
4. Montrer que la forme quadratique associée $q_{(0,0)}$ au point $(0,0)$ est positive.
5. La fonction f admet-elle un extremum en $(0,0)$?

Exercice 5 – Soit g définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x,y) = x \ln y - y \ln x$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer le gradient et la hessienne de g en tout point.
3. Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de g.

Exercice 6 – Démontrer que la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ a un unique extremum, et que c'est un extremum global.

Exercice 7 – Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = x^2$ et $y = x - 2$. Calculer la distance entre C_1 et C_2, c'est-à-dire

$$\min\{d(M,N), M \in C_1, N \in C_2\}.$$

Exercice 8 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, puis déterminer les points critiques de f
2. Déterminer la hessienne de f en tout point X de $\mathbb{R}^3$.
3. Étudier les éventuels extremums de f.

Exercice 9 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = yz\mathrm{e}^x + zx\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^z$.

1. Montrer que $(0,0,0)$ est point critique de f, et que tout autre point critique vérifie $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^*)^3$
2. Soit (x,y,z) un pouint critique de f, différent de $(0,0,0)$ et $g : u \mapsto \frac{1-u}{u}\mathrm{e}^u$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que $g(x) = g(y) = g(z)$. Étudier les variations de g.
   (b) Montrer que si $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_-^*)^3$, alors $x = y = z$ et déterminer le ou les points critiques de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
   (c) Montrer que si $x > 0$, alors $y < 0$ et $z < 0$, puis $y = z$ et enfin que $x = \frac{2}{y+1}$. En déduire que $y \in]-1,0[$
   (d) En étudiant les variations sur $]-1,0[$ de la fonction $h : y \mapsto y\mathrm{e}^{\frac{2}{1+y}} + 2\mathrm{e}^y$, montrer qu'il existe un unique point critique $C_1 = (x_1, y_1, z_1)$ tel que $x_1 > 0$
3. En déduire que les points critiques de f sont $(0,0,0)$, $(-2,-2,-2)$ et trois autres points C_1, C_2 et C_3 qu'on ne cherchera pas à expliciter.
4. Étudier le signe de $f(x,y,0)$. La fonction f admet-elle un minimum en $(0,0,0)$?
5. Montrer que quand h tend vers 0, on a :
$$f(-2+h, -2+h, -2+h) = f(-2,-2,-2) - 3\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2)$$
$$\text{et} \qquad f(-2+h, -2, -2) = f(-2,-2,-2) + 2\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2).$$
   La fonction f admet-elle un extremum en $(-2,-2,-2)$?
6. Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x,y,z)$ en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La fonction f admet-elle un extremum local en C_1, C_2 et C_3 ?

Exercice 10 – Soit f la fonction définie sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - \ln x - \ln y.$$

1. Justifier que l'équation $ze^z = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet sur D un unique point critique $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et que a et b vérifient $a = b$. On ne demande pas de déterminer a et b.
3. Déterminer la hessienne $\nabla^2 f(x,y)$ en tout $(x,y) \in D$, et déterminer, pour tout $(x,y) \in D$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, le signe de la forme quadratique associée au point (x,y), évaluée en (u,v), c'est-à-dire $q_{(x,y)}(u,v)$.
4. Justifier que la courbe de f présente au point A un minimum global.

Exercice 11 – Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x^2 y \ln(x^2y^2)$.

1. Déterminer les éventuels points critiques de f. La fonction f admet-elle des extremums locaux ? globaux ?
2. Déterminer les éventuels extremums de f sous la contrainte $y = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 12 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$.

1. Déterminer les points critiques de f, les extremums, les points-selles.
2. Déterminer les points critiques et les extremums sous la contrainte $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ x + z & = & 1. \end{array} \right.$

Exercice 13 – Soit $f : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathcal{C}$ le plan d'équation $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i = s$.

1. Déterminer les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

Exercice 14 –

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. On considère les fonctions f et g définies par $f(x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ et $g(x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

On pose $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 1\}$.

1. Montrer que f possède un maximum M sur Γ et que celui-ci est atteint sur $\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$. Montrer que $M = f(1, \dots, 1) = 1$.
3. En déduire que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^*, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$

Exercice 15 – Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4.$$

1. Déterminer l'unique point critique de f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$.
2. Justifier, à l'aide d'une formule de Taylor, qu'il s'agit de l'unique minimum de f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$.

Exercice 16 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 < \cdots < u_n$ des réels, $\overline{u} \in \mathbb{R}$, et f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par :

$$f(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i.$$

1. Soit $P = (p_1, \dots, p_n)$ un point critique de f sous la contrainte $\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = \overline{u}, \right)$
   (a) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que
   $$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda + \mu u_i - 1} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{e}^{\lambda + \mu u_i - 1} = \overline{u}.$$
   (b) En déduire que $\sum_{i=1}^{n} (\overline{u} - u_i) \mathrm{e}^{\mu(\overline{u} - u_i)} = 0.$
   (c) En déduire enfin que pour que f admette un point critique sous la contrainte donnée, il faut que $\overline{u} \in]u_1, u_n[$.
2. Réciproquement, on suppose que $\overline{u} \in]u_1, u_n[$.
   (a) En étudiant les variations de $\mu \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\overline{u} - u_i) \mathrm{e}^{\mu(\overline{u} - u_i)}$, montrer l'existence et l'unicité d'un réel μ solution de l'équation de la question 1(b).
   (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple (λ, μ) solution du système de la question 1(a), puis l'existence et l'unicité d'un point critique P de f sous la contrainte donnée.
3. Démontrer que ce point critique correspond à un maximum sous contrainte.

Exercice 17 – On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ est la réunion de deux segments et d'une courbe C que l'on précisera.
3. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et que $D \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. Étudier les extremums de f sur D.
   Indication : On pourra montrer que f admet un minimum et un maximum, et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$.

Exercice 18 – Soit g la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+)^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par $g(x, y, z) = xyz - \ln(x + y + z)$, et f sa restriction sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

1. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^3$, et calculer son gradient en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
   (b) Montrer que f admet un unique point critique $C = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$
2. (a) Déterminer la matrice hessienne de f au point C.

(b) La fonction f admet-elle un extremum local au point C ? Admet-elle un extremum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$?

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$. La fonction f est-elle majorée ?

   (b) En considérant $(x,y,z) = (t, 1, \frac{1}{t})$, montrer que f n'est pas minorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

4. Soit ε et A deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon < A$. On définit :

   $D_{\varepsilon,A} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid \varepsilon \leqslant x+y+z \leqslant A\}$ et $D'_{\varepsilon,A} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mid \varepsilon \leqslant x+y+z \leqslant A\}$

   (a) Montrer que $D'_{\varepsilon,A}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que la restriction de g à $D'_{\varepsilon,A}$ admet un maximum global.

   (c) En comparant, pour tout $(x,y,z) \in D'_{\varepsilon,A}$ dont une coordonnée au moins est nulle, $g(x,y,z)$ à $g\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)$, où $s = x+y+z$, justifier que le maximum de g sur $D'_{\varepsilon,A}$ est atteint sur l'un des deux ensembles $T_\varepsilon = \{(x,y,z \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid x+y+z = \varepsilon\}$ ou $T_A = \{(x,y,z \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid x+y+z = A\}$, et n'est atteint en aucun autre point de $D'_{\varepsilon,A}$.

5. Soit, pour tout $a > 0$, $U_a = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x+y < a\}$.

   (a) Justifier que U_a est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

   (b) On définit la fonction h_a sur U_a par $h_a(x,y) = g(x,y,a-x-y)$.
   Montrer que h_a admet un unique point critique C_a

   (c) En calculant $\nabla^2 h_a(C_a)$, montrer que h_a présente en C_a un maximum local que l'on exprimera en fonction de a

6. On suppose $\varepsilon = 3^{2/3}$ fixé

   (a) En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{27} - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, justifier que g présente un maximum sur $D'_{\varepsilon,A}$ en l'unique point $\left(\dfrac{A}{3}, \dfrac{A}{3}, \dfrac{A}{3}\right)$

   (b) En déduire que la restriction de f à $D_{\varepsilon,A}$ admet un maximum m_A et préciser le ou les points en lesquels il est atteint. Donner un équivalent simple de m_A lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 19 – Déterminer l'existence et la valeur des extremums globaux de f sur D, où $D = [-2,2]^3$ et

$$\forall (x,y,z) \in D, \quad f(x,y,z) = x^3 - xy - yz + 2z^2.$$

Étudier la nature (extremum local ou global, ou rien) de tous les points critiques de f sur $]-2,2[^3$.

Exercice 20 – (ESCP 2010)

Dans tout cet exercice, on confond $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on confond un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associée relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite positive qi, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXSX > 0$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit M une matrice symétrique réelle définie positive. Soit $C \in \mathbb{R}^n$ donnée. On pose, pour tout X de $\mathbb{R}^n$:

$$f_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_M(X) = {}^tXMX + 2\,{}^tCX.$$

   (a) Montrer que f_M admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^n$, valant $-M^{-1}C$.

   (b) Montrer qu'en ce point critique f atteint son minimum.

   Dans la suite, A et B sont deux matrices symétriques réelles définies positives.

3. (a) Montrer que $A+B$ est inversible.

   (b) Montrer que :

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = A - A(A+B)^{-1}A = B - B(A+B)^{-1}B.$$

   (c) Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ donné. Montrer que :

$$\inf\{\,{}^tXAX + {}^tYBY \mid X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } X+Y = Z\}$$

   existe et est égal à ${}^tZNZ$, où N est une matrice réelle que l'on exprimera en fonction de A et B.