Algèbre 1 (corrections) – Algèbre linéaire (révisions)

Correction de l'exercice 3 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. • Montrons que la somme $\mathrm{Ker}(g) + (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$ est directe. Cela provient du fait que, puisque g est un projecteur, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont en somme directe (ils sont supplémentaires dans E). Ainsi

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}.$$

Ainsi, par double-inclusion, $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \text{ est directe}}$

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Alors $f \circ g(x) = 0$. Comme $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$, il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(g)$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors

$$0 = f \circ g(x) == f \circ g(x_1) + f \circ g(x_2).$$

Or, $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$, donc $f \circ g(x_1) = 0$, et $x_2 \in \mathrm{Im}(g)$, et g étant un projecteur, $g(x_2) = x_2$. Donc la relation précédente se réécrit $0 = f(x_2)$, et par conséquent $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.
On a donc $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$.
On obtient donc l'inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)).}$

• Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\, g$, alors $f \circ g(x) = f(0) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$. Alors, comme g est un projecteur, $g(x) = x$, donc $0 = f(x) = f \circ g(x)$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Ces deux inclusions amènent $\mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$.

Les deux inclusions amènent l'égalité.

2. • Soit $x \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(g(y))$, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. De plus, $x = x - g(y) + g(y)$, et $f(x - g(y)) = f(x) - f \circ g(y) = x - x = 0$, car $f(x) = x$, puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, et f est un projecteur. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}(g)$. Donc $x \in \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g)$

• Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g)$, alors il existe $y \in E$, $z \in E$, et $t \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $x = f(y) = t + g(z)$. Alors

$$x = f(y) = f \circ f(y) = f(t) + f \circ g(y) = f \circ g(y),$$

donc $x \in \mathrm{Im}(f \circ g)$.

3. • On a $(\mathrm{id} - g)^2 = \mathrm{id} + g^2 - 2g = \mathrm{id} + g - 2g = \mathrm{id} - g$, donc $\mathrm{id} - g$ est un projecteur.

• Si p est un projecteur, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p)$, car $x \in \mathrm{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. En appliquant cela à $\mathrm{id} - g$ et à g, il vient :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} - g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - (\mathrm{id} - g)) = \mathrm{Ker}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - g).$$

4. On suppose que f et g sont deux projecteurs de E.

• Si $f \circ g$ est un projecteur également, alors $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (\mathrm{id} - g))$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Alors, comme $f \circ g$ est un projecteur, $x = f \circ g(x)$, et donc

$$f(x) = f^2 \circ g(x) = f \circ g(x) \qquad \text{soit:} \qquad f(x - g(x)) = 0 \qquad \text{soit:} \qquad f \circ (\mathrm{id} - g)(x) = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (\mathrm{id} - g))$, et d'après la description donnée pour ces espaces, du fait que f, g et $\mathrm{id} - g$ sont des projecteurs,

$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id} - g)) = \mathrm{Im}(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)).$$

• Réciproquement, si cette inclusion est vérifiée, donc si $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (\mathrm{id} - g))$, soit $x \in E$. Alors

$$(f \circ (\mathrm{id} - g))(f \circ g)(x) = 0 \qquad \text{soit:} \qquad f^2 \circ g(x) - (f \circ g)^2(x) = 0 \qquad \text{soit:} \qquad f \circ g(x) = (f \circ g)^2(x).$$

Ceci étant vrai pour tout x, $f \circ g$ est un projecteur.

Correction de l'exercice 7 – Remarquez que le théorème des noyaux itérés démontré dans l'exercice précédent permet de conclure directement : Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f^0)) = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$ (thm du rang) et $\dim(\mathrm{Ker}(f^3)) = (p+1)n$, la décroissance de la suite des différences successives de ces dimensions amène $n \geqslant \dim \mathrm{Ker}(f^2) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant (p+1)n - \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2n$ puis $(p+1)n \leqslant 3n$, et comme $p \geqslant 2$, cela amène $p = 2$ nécessairement. De plus, si $\dim \mathrm{Ker}(f^2) < 2n$, on a aussi l'inégalité stricte $(p+1)n < 3n$, ce qui est impossible.
Maintenant qu'on a compris la raison profonde de ce résultat, rédigeons la preuve en contournant l'utilisation du théorème des noyaux itérés.
Soit $u : \mathrm{Im}(f) \to E$ la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et assez évidemment, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(f^2)$ (justifiez-le proprement tout de même). Appliquons le théorème du rang à u :

$$\mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = pn.$$

Comme $\dim \mathrm{Ker}(f) = n$, on obtient :

$$\mathrm{rg}(f^2) \geqslant pn - n = (p-1)n \geqslant n,$$

car $p \geqslant 2$.
Soit $v : \mathrm{Im}(f^2) \to E$ la restriction de f à $\mathrm{Im}(f^2)$. Alors $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(f^3) = \{0\}$. Ainsi, d'après le thm du rang :

$$\mathrm{rg}(f^2) = 0 + \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^2) \leqslant n.$$

Les deux inégalités amènent l'égalité.

Correction de l'exercice 14 –

1. Montrons que E un un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - On a évidemment $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   - Avec $P = 0$, on obtient $0 \in E$,
   - Soit f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x)\mathrm{e}^x.$$

     Ainsi,

     $$\forall x \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)(x) = (P(x) + \lambda Q(x))\mathrm{e}^x.$$

     Comme, d'après les régles sur les degrés, $P + \lambda Q$ est encore un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, il vient que $f + \lambda g$ est dans E.

   Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc c'est un espace vectoriel.
   De plus :
   - Soit $f \in E$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f = P \cdot \exp$. Notons :

     $$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0.$$

     Alors

     $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i(x).$$

     Par conséquent, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.
   - Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

     $$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \mathrm{e}^x = 0.$$

     Comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut simplifier par e^x, et il vient

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0.$$

     Ainsi, le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ admet une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls, et donc :

     $$\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

     Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre.

La famille $\mathcal{B}$ étant libre et génératrice de E, c'est une bas de E. Puisque cette base est de cardinal $n+1$, on obtient $\dim E = n+1$.

2. (a) Soit $f \in E$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

Tout d'abord, D est bien définie, puisqu'une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f'(x) = (P'(x) + P(x))\mathrm{e}^x.$$

Comme $\deg P' \leqslant \deg P$, on a encore $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $f' \in E$. Ainsi, D est bien définie de E dans E.
De plus, pour tout $(f,g) \in E^2$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g).$$

Ainsi, D est une application linéaire.
Par conséquent, D est un endomorphisme de E.

(b) On a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D(b_i)(x) = b_i'(x) = (x^i + ix^{i-1})\mathrm{e}^x = b_i(x) + ib_{i-1}(x).$$

Ainsi, les coordonnées de $D(b_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$[D(b_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}$$

le terme 1 étant sur la ligne d'indice i (la ligne supérieure étant d'indice 0, correspondant à l'indice de l'élément correspondant b_0 de la base $\mathcal{B}$)
De plus, si $i = 0$, $b_0 = \exp$, donc $D(b_0) = (b_0)$, et la colonne correspondante est contituée d'un 1 en première coordonnée, et des 0 partout ailleurs. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est carrée d'ordre $n+1$.

(c) La matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous non nuls, donc elle est inversible. Donc D est un isomorphisme.
La matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ainsi, D possède une unique valeur propre égale à 1. Or, D n'est pas une homothétie (sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas de la forme λI_{n+1}), donc D n'est pas diagonalisable.
Nous venons de justifier que $\mathrm{Sp}(D) = \{1\}$. De plus, étant donné f dans E, f est dans le sous-espace propre E_1 associé à 1 si et seulement si $D(f) = f$. Or, soit P tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x,$$

et par conséquent, $D(f) = f$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 0$, donc si P est un polynôme constant.
Ainsi, $E_0 = \mathrm{Vect}(\exp)$, c'est la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle, c'est-à-dire par b_0.

3. (a) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi : $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f(b_j) = jb_{j-1}$, et $f(b_0) = 0$.

(b) En itérant ces relations, on trouve :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(b_j) = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)b_{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) On en déduit que :

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{k!}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{(k+1)!}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{n!}{(n-k)!} \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } k \leqslant n$$

et $B^k = 0$ si $b > n$.

(d) Bien entendu, B commute avec I_{n+1}, donc on peut utiliser la formule du binôme. Soit $k \leqslant n$. Alors

$$A^k = (B + I_{n+1})^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^\ell.$$

Je vous laisse donner la description matricielle de A^k, c'est plus facile avec un stylo qu'avec un ordinateur. Il reste dans cette matrice un coin supérieur droit constitué de 0.
Si $k > n$, cette fois, la somme précédente est tronquée, puisque les valeurs de B^ℓ sont nulles pour ℓ suffisamment grand. On remplit alors toute la partie supérieure de la matrice.

(e) Les coordonnées de $D^k(b_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont obtenues en multipliant la matrice A par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, reprsentant les coordonnées de b_n dans la base $\mathcal{B}$. Ce produit est égal à la dernière colonne de A^k.

- Ainsi, si $k \leqslant n$:

$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \binom{k}{k}\frac{n!}{(n-k)!} \\ \binom{k}{k-1}\frac{n!}{(n-k+1)!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1}\frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0}\frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k \leqslant n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, en notant f_i la fonction $x \mapsto x^i$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad b_i^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \exp^{k-\ell}(x) f_n^\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

- Si $k > n$, tout se passe de même en tronquant la somme :

$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \binom{k}{n}\frac{n!}{0!} \\ \binom{k}{n-1}\frac{n!}{1!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1}\frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0}\frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k > n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, de même que plus haut, en constatant que les derniers termes apparaissant dans la somme sont nuls, car correspondent à une dérivée d'un polynôme, d'ordre supérieure à son degré.

4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 5$.**

(a) On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule A^{-1} par la méthode du pivot, en faisant les mêmes opérations sur I_{n+1} que celles qui permettent de passer de A à I_{n+1} :

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_5 \underset{\longrightarrow}{\leftarrow L_5} - 5L_6 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_4 \underset{\longrightarrow}{\leftarrow L_4} - 4L_5 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) La primitivation étant l'opération inverse de la dérivation, les coordonnées d'une primitive de b_5 dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 120 \\ -60 \\ 20 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une primitive de b_5 est la fonction B_5 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_5(x) = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x.$$

(c) La seule impropreté de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ est en $-\infty$. Or, $\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^7}\right)$ au voisinage de $-\infty$, donc $x^5\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on obtient la convergence de l'intégrale. De plus

$$\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x\Big]_{\lim -\infty}^{0} = -120 = -5!,$$

d'après les croissances comparées. On retouve la valeur de $\Gamma(6)$. En effet, en effectuant le changement de variables $y = -x$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} y^5 \mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = \Gamma(6).$$

5. C'est bien entendu une base de E et non de $\mathbb{R}_n[X]$ qu'il faut trouver (sinon la question n'a clairement aucun sens) On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D(b_i) = b_i + ib_{i-1}$, donc $b_{i-1} = \frac{1}{i}(D(b_i) - b_i)$.
On recherche une base $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; D(c_i) = c_i + c_{i-1}, \qquad \text{soit:} \qquad c_{i-1} = D(c_i) - c_i.$$

Posons par exemple $c_n = b_n$. Alors, d'après les relations ci-dessus, on doit nécessairement poser $c_{n-1} = nc_n$. Dans ce cas

$$c_{n-2} = D(c_{n-1}) - c_{n-1} = n(D(b_{n-1}) - b_{n-1}) = n(n-1)b_{n-2}.$$

En continuant ainsi, on peut donc poser, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$c_k = (k+1)(k+2)\dots nb_k.$$

Puisque $(b_0, \dots, b_n)$ est une base de E, et que $(c_0, \dots, c_n)$ est obtenu par multiplication par un coefficient non nul de chaque vecteur b_i, on en déduit que $(c_0, \dots, c_n)$ est une base de E. De plus,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad D(c_k) = D((k+1)\dots nb_k) = (k+1)\dots n(b_k + kb_{k-1}) = c_k + c_{k-1}.$$

De plus, $D(c_0) = n!D(b_0) = n!b_0 = c_0$. Ainsi, la matrice de D dans la base $\mathcal{C} = (c_0, \dots, c_n)$ est bien :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 18 –

- Première méthode : $X^3 - X$ étant un polynôme annulateur de A, les seules valeurs propres de A sont 0, i et $-$i.
  - $*$ Si i est valeur propre, alors son conjugué $-$i aussi, la matrice étant réelle. Ainsi, 0 ne peut pas être valeur propre. La matrice d'ordre 2 ayant 2 valeurs propres, elle est diagonalisable, et semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est également semblable à cette matrice (effectuer la diagonalisation). Ainsi, A est bien semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si on veut prouver qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire qu'on peut trouver une matrice de passage P à coefficients réels), il faut alors utiliser un résultat hors-programme qui permet d'affirmer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas si évident que cela... Pour cette raison, la deuxième méthode est préférable.
  - $*$ Si 0 est valeur propre, i ne peut pas l'être (sinon $-$i aussi et on a 3 valeurs propres pour une matrice d'ordre 2), et $-$i non plus, pour les mêmes raisons. Ainsi, 0 est l'unique valeur propre. Puisque $A \neq 0$, $\dim Ker(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$, donc $\dim \mathrm{Im}(A) = 1$, disons $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}X$, $X \neq 0$. On a alors $AX \in \mathbb{R}X$, donc il existe λ tel que $AX = \lambda X$, $X \neq 0$. Comme 0 est la seule valeur propre $\lambda = 0$, donc $AX = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$, et donc $A^2 = 0$, puis $A^3 = 0$, et comme $A = -A^3$, on obtient $A = 0$, ce qui nous amène une contradiction avec l'hypothèse $A \neq 0$. Ce cas est donc impossible.
- Deuxième méthode. Soit X tel que $AX \neq 0$. Alors (X, AX) est une famille libre. En effet, si $\lambda X + \mu AX = 0$, alors, si μ est non nul, $-\frac{\lambda}{\mu}$ est valeur propre réelle de A, et d'après le polynôme annulateur de A, la seule valeur propre réelle possible de A est 0. Ainsi, $\lambda = 0$, donc $\mu AX = 0$, et comme $AX \neq 0$, $\mu = 0$, d'où une contradiction. Donc $\mu = 0$, puis $\lambda = 0$.
  Ainsi, (X, AX) est une base de $\mathbb{R}^2$.
  Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a $f(X) = AX$ et $f(AX) = A^2X$. Pour les mêmes raisons que dans la méthode 1, 0 ne peut pas être vp de A, donc A est inversible, donc l'égalité $A^3 + A = 0$ se simplifie en $A^2 + I_2 = 0$. Ainsi, $f(AX) = -X$. Par conséquent, la matrice de f dans la base (A, AX) est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.