

Corrections Algèbre 2 – Algèbre linéaire (Feuille technique)

Correction de l'exercice 3 – Produit matriciel

On désigne par C_i les colonnes de la matrice de gauche, et par L_j les lignes de la matrice de droite. Je me contente de donner la démarche sans expliciter le résultat

1. $P_1 = (C_2 \mid C_1)$
 2. $P_2 = \begin{pmatrix} -L_1 \\ 2L_2 \end{pmatrix}$
 3. $P_3 = (C_1 \mid -C_2 \mid 2C_1 \mid C_1)$
 4. $P_4 = (-C_2 \mid C_1 \mid 2C_3)$
 5. $P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ -L_1 \\ -L_2 \end{pmatrix}$
 6. $P_6 = (0 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
 7. $P_7 = (C_4 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
 8. $P'_7 = (C_1 + C_4 \mid C_1 + 2C_2 \mid C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3)$
 9. $P_8 = (2C_2 + C_4 \mid 2C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3 \mid C_1 + 2C_4)$
- N'oubliez pas de remarquer que les deux premières colonnes sont identiques. Inutile de faire deux fois le même calcul !
10. $P_9 = (3L_2 + 4L_3 \mid 3L_2 + 4L_3n \mid L_1 + L_2 + L_4 \mid L_1 + L_2 + L_4)$
- De même, il n'y a ici que deux colonnes à calculer !
11. $P_{10} = \begin{pmatrix} L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_2 \\ 2L_1 + L_4 \\ L_1 + L_3 + L_4 \end{pmatrix}$
 12. $P_{11} = (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 \mid \text{idem} \mid 4C_1 + C_2 + 2C_3 + 2C_4 \mid \text{idem} * 2)$

On peut aussi faire des CL des lignes de la deuxième matrice, dans ce cas, il y a trois calculs à faire, mais un peu plus rapides. Aucune des deux méthodes n'est vraiment meilleure.

Correction de l'exercice 4 – Rang d'une matrice

Déterminer le rang des matrices suivantes

1. $\text{rg}(M_1) = 2$
2. $\text{rg}(M_2) = 1$
3. $\text{rg}(M_3) = 2$
4. $\text{rg}(M_4) = 1$
5. $\text{rg}(M_5) = 2$
6. $\text{rg}(M_6) = 1$
7. $\text{rg}(M_7) = 2$
8. $\text{rg}(M_8) = 1$
9. $\text{rg}(M_9) = 1$
10. $\text{rg}(M_{10}) = 1$
11. $\text{rg}(M_{11}) = 2$
12. $\text{rg}(M_{12}) = 2, C_1 + C_2 = C_3$
13. $\text{rg}(M'_{12}) = 2, C_1 - C_2 = C_3$
14. $\text{rg}(M_{13}) = 2, 2C_1 + C_2 = C_3$
15. $\text{rg}(M_{14}) = 2, 3C_1 - 2C_2 = C_3$, relation que l'on trouve en considérant la première ligne, qui impose les coefficients de C_1 et C_2 .
16. $\text{rg}(M_{15}) = 3$ (de même, s'aider de la dernière ligne pour trouver la seule relation possible, qui n'en est pas une)

17. $\text{rg}(M_{16}) = 3$ (même raisonnement, la seule relation doit faire intervenir $C_1 + C_2$, et cette opération ne donne pas un vecteur colinéaire à C_3)
18. $\text{rg}(M_{17}) = 2$, $C_1 = C_4$ et $C_1 + C_2 = C_3$.
19. $\text{rg}(M_{18}) = 3$
20. $\text{rg}(M_{19}) = 3$
21. $\text{rg}(M_{20}) = 4$
22. $\text{rg}(M_{21}) = 3$
23. $\text{rg}(M_{22}) = 4$
24. $\text{rg}(M_{23}) = 5$
25. $\text{rg}(M_{24}) = 4$
26. $\text{rg}(M_{25}) = 4$.

Correction de l'exercice 5 – Calcul de l'inverse d'une matrice

1. $A_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. A_3 non inversible
4. $A_4^{-1} = -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$
5. $A_5^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
6. $A_6^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7. $A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. A_8 non inversible
9. $A_9^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 7 & 10 & -9 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$
10. A_{10} non inversible
11. $A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12. $(A'_{11})^{-1} = \frac{1}{105} \begin{pmatrix} 15 & -45 & 60 & -30 \\ 4 & 44 & -33 & 13 \\ -28 & 7 & 21 & 14 \\ 18 & -12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$
13. $(A''_{11})^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -38 & -79 & 33 & 45 \\ 30 & 83 & -29 & -37 \\ 20 & 60 & -24 & -20 \\ 16 & 20 & -8 & -16 \end{pmatrix}$
14. $A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15. $A_{13}^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 19 & 22 & -20 & -8 & 16 \\ 33 & -11 & 10 & 4 & -8 \\ -45 & 15 & 25 & 10 & -20 \\ -27 & 9 & 15 & -11 & 22 \\ 81 & -27 & -45 & 33 & 19 \end{pmatrix}$

$$16. A_{14}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 & -1 & -3 \\ 15 & -9 & -12 & -12 & -9 \\ -7 & 6 & 8 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 7 & 10 & 3 \\ -16 & 15 & 17 & 23 & 6 \end{pmatrix}$$

$$17. A_{15}^{-1} = \frac{1}{114} \begin{pmatrix} -40 & 20 & 35 & -3 & 13 \\ 74 & -94 & -22 & 54 & 70 \\ -22 & 68 & 5 & -33 & -47 \\ -98 & 106 & -14 & -90 & -28 \\ 70 & -92 & 10 & 48 & 20 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 6 –

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
7. $(F = \mathbb{R}^2) \begin{pmatrix} -7 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. Aidez-vous de l'échelonnement de la base d'arrivée, pour décomposer les éléments $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans cette base.
On obtient la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$
11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & & & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
12. $\left(\binom{k}{i} (-a)^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$, (formule du binôme) avec la convention $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$.
13. $\left(\binom{k}{i} a^{k-i} \right)_{0 \leq i, k \leq n}$ (formule du binome pour $X^k = (X - a + a)^k$, ou formule de Taylor)
14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$15. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

$$17. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} \cos a & a \cos a & \sin a & a \sin a \\ 0 & \cos a & 0 & \sin a \\ -\sin a & -a \sin a & \cos a & a \cos a \\ 0 & -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$20. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \dots & 2-2^k & \dots & 2-2^n \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 2^k-1 & \dots & 2^n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^0 & 2-2^1 & 2-2^2 & \dots & 2-2^k & \dots & 2-2^n \\ 2^0-1 & 2^1-1 & 2^2-1 & \dots & 2^k-1 & \dots & 2^n-1 \end{pmatrix}$$

$$21. \text{ Avec la convention } \binom{j}{i} = 0 \text{ si } i > j \text{ ou si } i < 0,$$

$$\left(j(j-1)(-j)^{j-i} \binom{j-2}{i-2} - j(-j)^{j-i-1} \binom{j-2}{i-1} + (2j-1)(-j)^{j-i-2} \binom{j-2}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Correction de l'exercice 8 –

$$1. P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. non diagonalisable

$$5. P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7. P_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_7 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. non diagonalisable (une seule vp : 2, dim $E_2 = 2$).

$$9. P_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. P_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$11. \text{ non diagonalisable } (\text{Sp}(M_{11}) = \{1, 2\}, E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$12. \text{ non diagonalisable } (\text{Sp}(M_{12}) = \{-1, 1\}, E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$13. P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$14. P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

15. pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (4 vp distinctes). Je n'écris pas la diagonalisation.

$$16. P_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$