Corresctions Algèbre 3 – Diagonalisation, réduction

Correction de l'exercice 3 –

1. Cherchons les valeurs propres de A, c'est-à-dire les valeurs (dans $\mathbb{R}$, ou éventuellement dans $\mathbb{C}$) pour lesquelles $A-\lambda I_4$ n'est pas inversible. Pour cela, nous effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $A-\lambda I_4$:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 8-4\lambda & 4-4\lambda & -\lambda^2+8\lambda-11 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & -\lambda^2+6\lambda-5 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & -2(\lambda-2) & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $A-\lambda I_4$ est non inversible si et seulement si la matrice triangulaire supérieure obtenue par des opérations élémentaires est non inversible, si et seulement si les coefficients diagonaux de cette dernière ne sont pas tous non nuls, si et seulement si $\lambda = 1, 2$ ou 3. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de A est $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}.}$

On ne peut pas conclure tout de suite quant à la diagonalisabilité de A, car on n'est pas dans les cas extrêmes d'une seule valeur propre, ou d'un nombre de valeurs propres égal à l'ordre de la matrice. Déterminons donc la dimension des espaces propres.

Dimension des espaces propres – diagonalisabilité.

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $A-I_4$, on a :

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(A-\lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}(A-\lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}\, M_1.$$

Or, $\mathrm{rg}\, M_1 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\boxed{\dim E_1 = 2}$.

On peut dès à présent conclure que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. En effet $\dim E_2 \geqslant 1$ et $\dim E_3 \geqslant 1$, puisque 2 et 3 sont des valeurs propres de A. Ainsi, $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 \geqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme les espaces E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe, et sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a aussi l'inégalité réciproque. D'où l'égalité. D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, A est donc diagonalisable. On a de plus acquis la dimension des espaces propres :

$$\boxed{\dim E_1 = 2} \qquad \boxed{\dim E_2 = 1} \qquad \boxed{\dim E_3 = 1}.$$

L'espace propre E_1

Les colonnes de M_1 vérifient $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 + C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de M_1, donc aussi de $A - I_4$, le pivot de Gauss préservant le noyau. Donc ce sont des vecteurs de E_1. De plus, ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre (argument valable uniquement pour une famille de 2 vecteurs !) et comme $\dim E_1 = 2$, ils forment une base de E_1. Ainsi, $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$.

L'espace propre E_2

De même, $M_2 = \begin{pmatrix}4 & -4 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, donc les colonnes de M_2 vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un élément de E_2. Comme E_2 est de dimension 1, $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}$.

L'espace propre E_3 De même, $M_3 = \begin{pmatrix}4 & -4 & -4 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} X = 0$, donc les colonnes de M_3 vérifient $C_3 + 2C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ est un élément de E_3. Comme E_3 est de dimension 1, $\boxed{E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)}$.

Ainsi, on a :

$$\boxed{D = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}}.$$

2. Cherchons à quelle condition sur λ la matrice $B - \lambda I_4$ n'est pas inversible, en effectuant un pivot de Gauss sur cette matrice.

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 0 & 4\\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4\\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4\\ -1 & 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -\lambda\\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4\\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4\\ 3-\lambda & 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 + (3-\lambda)L_1\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda\\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda\\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4\end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4\\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\ L_4 \leftarrow (2-\lambda)L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4\\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1)\end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $B - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 2\}$ (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).
Encore une fois, il est impossible de conclure immédiatement quant à la diagonalisabilité de B. Étudions donc les dimensions des espaces propres.

L'espace propre E_1

On a : $M_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Ainsi M_1 est de rang 2.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\operatorname{rg}(B - I_4) = 2$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - I_4$, on a donc

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg}(B - I_4) = 4 - 2 = \boxed{2 = \dim E_1}.$$

L'espace propre E_2

On a : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M_2 est de rang 3.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\operatorname{rg}(B - 2I_4) = 3$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - 2I_4$, on a donc

$$\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg}(B - 2I_4) = 4 - 3 = \boxed{1 = \dim E_1}.$$

On a donc $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 < 4$, donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$ (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$).

Correction de l'exercice 16 – (Oral HEC)

1.
   - Un endomorphisme f de E (de dimension finie) est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de E est diagonale, donc si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
   - Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est diagonalisable, donc si et seulement si il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Les colonnes C_1 et C_3 de M sont égales, donc le rang de M est au plus égal à 2. De plus, les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, donc le rang de M est au moins égal à 2. Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(M) = 2}$.

   Comme M n'est pas inversible, on en déduit que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M}$. D'après le théorème du rang, l'espace propre E_0 associé vérifie :
   $$\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f = 3 - \operatorname{rg} M = 1,$$
   où f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Ainsi, $\boxed{\dim E_0 = 1}$.

   Enfion, puisqu'on a la relation $C_1 - C_3 = 0$, on a $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0$. Comme E_0 est de dimension 1, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0}$
3. On montre que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$. Alors
   $$(\lambda + \mu + \nu)X^2 + (-\lambda + \nu)X + (-\lambda + \mu + \nu) = 0.$$
   Par liberté de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est cette liberté qui autorise l'identification des coefficients), on obtient le système
   $$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu & = & 0 \\ -\lambda + \nu & = & 0 \\ -\lambda + \mu + \nu & = & 0 \end{cases}$$
   En soustrayant la première et la dernière ligne, on obtient $\lambda = 0$, puis $\nu = 0$ grâce à la deuxième ligne, puis enfin $\mu = 0$, grâce à la première ligne. Ainsi, $\lambda = \mu = \nu$. Cela montre bien que la famille $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre. Comme c'est une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, on en conclut que c'est une base de $E = \mathbb{R}_2[X]$.
4. On a, en notant $[P]$ les coordonnées dans la base canonique de E d'un vecteur P de E :
   - $[f(P_1)] = M[P_1] = M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, donc $f(P_1) = 0$.
   - $[f(P_2)] = M[P_2] = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(P_2) = -1 + X^2 = P_1$

- $[f(P_3)] = M[P_3] = M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc $f(P_3) = P_2$.

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$ est $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$.

Notons N cette matrice. On a alors $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, puis $N^3 = 0$. Ainsi, $\boxed{f^3 = 0}$.

Si on connait un peu les polynômes annulateurs, on peut dire directement que X^3 est polynôme annulateur, et comme les valeurs propres sont nécessairement racines de tout polynôme annulateur, 0 est la seule valeur propre possible. Cette argument étant *stricto sensu* au programme de deuxième année, on peut le contourner de la manière suivante : soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé à λ. Alors

$$0 = f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(\lambda x) = \lambda f^2(x) = \lambda f(f(x)) = \lambda f(\lambda x) = \lambda^2 f(x) = \lambda^3 x.$$

Comme x n'est pas le vecteur nul, il vient $\lambda^3 = 0$, puis $\lambda = 0$. Ainsi, 0 est la seule valeur propre possible. On a déjà montré que 0 était effectivement valeur propre. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0\}}$.

5. - Soit $P \in V_1$. On a $V_1 = \mathrm{Vect}(P_1)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda P_1$. Ainsi, $f(P) = f(\lambda P_1) = \lambda f(P_1) = 0$. Donc $f(P) \in V_1$. Ainsi, $\boxed{V_1 \text{ est stable par } f}$.
   - Soit $P \in V_2$. On a $V_2 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$, donc il existe λ et μ tels que $P = \lambda P_1 + \mu P_2$. Ainsi :

   $$f(P) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2) = \mu P_1 \in V_2.$$

   Donc $\boxed{V_2 \text{ est stable par } f}$.

6. On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par f c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.
   (a) - Soit $P \in E$. Comme f est un endomorphisme de E, $f(P) \in E$, donc E est stable par f !
   - Soit $P \in \{0\}$. Alors $P = 0$, et f étant une application linéaire, $f(P) = 0 \in \{0\}$. Ainsi, $\{0\}$ est stable par f.

   (b) Puisque D est stable par f, on a $f(u) \in D$. Comme D est une droite, et u un vecteur non nul de cette droite, (u) est une base de D. Ainsi, il existe λ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque u est non nul, cette relation implique que λ est une valeur propre, et que $\boxed{u \text{ est un vecteur propre}}$ associé à λ.
   Or, la seule valeur propre de f est 0, et les seuls vecteurs propres de f sont les vecteurs non nuls de $E_0 = V_1$. Ainsi, $u \in V_1$, puis $D = \mathrm{Vect}(u) \subset V_1$. Les deux espaces ayant même dimension 1, on en déduit que $\boxed{D = V_1}$.

   (c) Puisque F est stable par f, on a $\nu \in F$, $f(\nu) \in F$ et $f^2(\nu) = f(f(\nu)) \in F$. Ainsi, les vecteurs ν, $f(\nu)$ et $f^2(\nu)$ sont tous les trois des éléments de F, qui est de dimension 2. Pour des raisons de cardinalité, ils ne peuvent pas former une famille libre. Ainsi, $\boxed{(\nu, f(\nu), f^2(\nu)) \text{ est une famille liée}}$.
   Or, on a $f(\nu) = \beta P_1 + \gamma P_2$ et $f^2(\nu) = \gamma$. Ainsi, la matrice de la famille $(f^2(\nu), f(\nu), \nu)$ dans la base $\mathcal{V}$ est :

   $$A = \begin{pmatrix}\gamma&\beta&\alpha\\0&\gamma&\beta\\0&0&\gamma\end{pmatrix}.$$

   Si $\gamma \neq 0$, cette matrice serait inversible (car triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls), donc la famille $(f^2(\nu), f(\nu), \nu)$ serait libre, d'où une contradiction. Ainsi, $\gamma = 0$, et $\nu \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2) = V_2$. Par conséquent, pour tout ν de F, $\nu \in V_2$, donc $F \subset V_2$, et ces deux espaces étant de même dimension 2, cette inclusion est une égalité : $\boxed{F = V_2}$.

Correction de l'exercice 17 – *Soit* $A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&-2&0&2\end{pmatrix}$, *et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*

1. Cherchons les valeurs propres de A (réelles ou complexes), c'est-à-dire les valeurs λ pour lesquelles $A - \lambda I_4$ est non inversible. Pour cela, posons $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et effectuons un pivot sur $A - \lambda I_4$ afin d'échelonner cette matrice pour savoir si elle est inversible ou non.

$$\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\1&-2&0&2-\lambda\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_1 \leftrightarrow L_2\\L_2 \leftrightarrow L_3\\L_3 \leftrightarrow L_4\end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2-\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - (2-\lambda)L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda(2-\lambda) & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \lambda(2-\lambda)L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2+\lambda^2(2-\lambda) & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda^2(2-\lambda))L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda(2-\lambda^2(2-\lambda)) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda-1)^3(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A-\lambda I_4$ est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire inférieure sont tous non nuls, donc si $(\lambda-1)^3(\lambda+1) \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.

Vous remarquerez que j'ai préféré me ramener à une matrice triangulaire inférieure, afin d'exploiter au mieux les nombreux zéros présents dans la matrice initiale.

Pour déterminer si A est diagonalisable, il nous faut déterminer la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1.

Espace propre E_{-1} :

D'après les opérations élémentaires ci-dessus, conservant le rang, on a :

$$\mathrm{rg}(A+I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A+I_4$, on a $\dim E_{-1} = 4-3 = 1$.

Espace propre E_1 :

De même, on a :

$$\mathrm{rg}(A-I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A-I_4$, on a $\dim E_1 = 4-3 = 1$.

Par conséquent, $\dim E_1 + \dim E_{-1} < 4$, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. **Base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.**

   On calcule $A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Cette matrice n'est pas de rang 4 car 1 est valeur propre de A. De plus, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, car triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls. Ainsi, ses trois premières colonnes, qui sont aussi les trois dernières colonnes de $A-I_4$, forment une famille libre. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A-I_4) = 3}$. Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(f-\mathrm{id}) = 1$. De plus, les colonnes de $A-I_4$ vérifient $C_1+C_2+C_3+C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$, et comme cet espace est de dimension 1, $\boxed{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$**.**

un calcul donne $(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Les colonnes de cette matrice vérifient $C_2 = C_4 - 2C_1$ donc $2C_1 + C_2 - C_4 = 0$, et $C_3 = C_1 - 2C_4$, donc $C_1 - C_3 - 2C_4 = 0$.

Ainsi, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$. Comme ces deux vacteurs ne sont pas colinéaires, cet espace est au moins de dimension 2. Comme les deux premières colonnes de $A - I_4$ ne sont pas colinéaires, cette matrice est au moins de rang 2, donc $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$ est au plus de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$ est de dimension 2 exactement, donc $\boxed{\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$.

Base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3$**.**

On a $(A-I_4)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ Toutes les lignes de cette matrice sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc cette matrice est de rang 1. Ainsi, la dimension de $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3)$ est 3. Les trois relations sur les colonnes $3C_1 + C_2 = 0$, $3C_1 - C_3 = 0$ et $C_1 + C_4 = 0$ fournissent 3 vecteurs de $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3)$. Ces trois vecteurs forment une famille libre (car échelonnée suivant la position de leur dernier coefficient non nul). Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

3. **Analyse :** Supposons que (b_1, b_2, b_3, b_4) soit une telle base. Alors :
   - $f(b_1) = b_1$, donc $b_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$;
   - $f(b_2) = b_1 + b_2$, donc $b_1 = (f-\mathrm{id})(b_2)$;
   - $f(b_3) = b_2 + b_3$, donc $b_2 = (f-\mathrm{id})(b_3)$;
   - $f(b_4) = -b_4$, donc $b_4 \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$.

   Ainsi, le choix de b_3 détermine celui de b_1 et b_2, et est indépendant du choix de b_4. De plus, $(f-\mathrm{id})^2(b_3) = b_1 \neq 0$, alors que $(f-\mathrm{id})^3(b_3) = 0$, donc il va falloir choisir $f \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3 \setminus \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$.

   Synthèse :

   Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3$, d'après la question précédente. De plus, il n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$, d'après la base trouvée pour cet espace (considérer les coordonnées 2 et 3 !) On pose alors :

$$\boxed{b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{b_2 = (f-\mathrm{id})(b_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{b_1 = (f-\mathrm{id})(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

   De plus, il faut choisir b_4 dans $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Or, $A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a une relation immédiate entre les colonnes : $C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Posons $\boxed{b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

   Montrons que (b_1, b_2, b_3, b_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, montrons que la matrice P de cette famille est inversible, en en trouvant une réduite de Gauss à l'aide de la méthode du pivot.

   On complète tout de suite les résultats en faisant les mêmes opérations sur la matrice I_4, puisque nous seront amenés à calculer l'inverse de cette matrice P pour le calcul de A^n.

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux non non nuls, donc inversible. Les opérations élémentaires conservant le rang, la matrice P est inversible, donc $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base. Dans cette base, la matrice de f est la matrice M donnée dans l'énoncé, puisque, par construction, $f(b_1) = b_1$, $f(b_2) = b_2 + b_1$, $f(b_3) = b_3 + b_2$ et $f(b_4) = -b_4$.

4. On décompose M en $M = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, et :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 3,\ N^n = 0.$$

   De plus, on vérifie aisément que $DN = N = ND$, donc N et D commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2} N^2.$$

   Un calcul facile montre que $D^{n-1}N = N$ et $D^{n-2}N^2 = N^2$ (récurrence à partir de $DN = N$, ou directement). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = D^n + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = M^n}.$$

   D'après la formule de changement de base, on a $A = PMP^{-1}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PMP^{-1}PMP^{-1} \cdots PMP^{-1} = PM^nP^{-1}.$$

   Terminons le calcul de P^{-1}, en reprenant le pivot à l'endroit on nous l'avions laissé dans la question précédente :

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_4 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow 8L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

En effectuant pour finir $L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ et $L_4 \leftarrow -\frac{1}{8}L_4$, on obtient :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Une vérification rapide montre qu'on a bien $P^{-1}P = I_4$, donc nos calculs sont corrects.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Nous laisserons le résultat sous cette forme. Même si l'énoncé semble dire de calculer ce produit, ne vous laissez pas prendre au piège : vous risquez de perdre une demi-heure en calculs stériles, vous avez plus intéressant à faire.

Correction de l'exercice 18 – (EDHEC 2006)

1. (a) Tout d'abord, l'expression de l'énoncé à du sens, puisque $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. On e alors :

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \mathrm{id}) - (f - \lambda_2 \mathrm{id})) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

(b) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id})$. Alors :

$$f(x) = \lambda_1 x \qquad \text{et} \qquad f(x) = \lambda_2 x.$$

Par conséquent, $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, donc $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, et comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) \subset \{0\}$, et l'inclusion réciproque étant évidentes (car ce sont des sous-espaces vectoriels), on a l'égalité. Ainsi, la somme de ces deux espaces est directe.
Cette propriété découle aussi d'une propriété plus générale sur les sous-espaces propres (en constatant que si ces espaces sont non nuls, ce sont des sous-espaces propres de f)

• Soit $x \in \mathbb{C}^m$. On a, d'après la question 1,

$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_1 x) - (f(x) - \lambda_2 x)) = x_1 + x_2,$$

où $x_1 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_1 x)$ et $x_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f(x) - \lambda_2 x)$. Or :
∗ $(f - \lambda_1 \mathrm{id})(x_2) = (f - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id})(0) = \theta(x) = 0$, donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id})$;
∗ $(f - \lambda_2 \mathrm{id})(x_1) = (f - \lambda_2 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_1 \mathrm{id})(0) = \theta(x) = 0$, donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id})$
On explique un peu ce dernier calcul en justifiant l'interversion de la composition :

$$(f - \lambda_2 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_1 \mathrm{id}) = f \circ f - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{id} + \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{id} = (f - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}).$$

(on peut faire une telle interversion dès lors que les deux endomorphismes sont des expressions polynomiales d'un même endomorphisme).
Ainsi, on a bien obtenu une décomposition d'un élément de $\mathbb{C}^m$ quelconque comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id})$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id})$. Ainsi :

$$\mathbb{C}^m \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}).$$

L'inclusion réciproque étant immédiate (car les deux noyaux sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$), on a l'égalité.

(c) Puisque $m \geqslant 1$ d'après l'énoncé, les deux espaces ne peuvent pas être tous les deux nuls. Ainsi, il y a trois cas possibles :
   - Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) = 0$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) = \mathbb{C}^m$, donc $f - \lambda_2 \mathrm{id} = 0$, donc $f = \lambda_2 \mathrm{id}$, et f est évidemment diagonalisable (c'est une homothétie). Dans ce cas, f possède une seule valeur propre égale à λ_2
   - De même si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) = 0$, l'unique valeur propre étant λ_1
   - Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) \neq 0$, alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f. D'après la question 1(b), la somme des dimensions des espaces propres associés est égale à m, la dimension totale. Comme la somme des dimensions de tous les espaces propres ne peut pas excéder m, et comme tous les sous-espaces propres sont au moins de dimension 1, il en résulte qu'il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre (cela résulte aussi des propriétés reliant le spectre à l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur...) Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, et f est diagonalisable, puisque $\mathbb{C}^m$ est somme directe des sous-espaces propres.

2. Par exemple $\mathrm{i} \cdot I$. Il y en a beaucoup d'autres.
3. (a) On a $A^2 = -I$. Ainsi, si f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n+1}$ canoniquement associé à A (vue comme matrice à coefficients complexes), on a $f^2 = -\mathrm{id}$, donc

$$(f - \mathrm{i}\,\mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{i}\,\mathrm{id}) = \theta.$$

D'après la question 1, f est diagonalisable, donc A est diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$. De plus, f ne peut pas être une homothétie, sinon A serait diagonale, de la forme λI, et on aurait $A^2 = \lambda^2 I = -I$, donc $\lambda^2 = -1$. Or, comme A est à coefficients réels, $\lambda \in \mathbb{R}$, et cette relation est impossible.

Ainsi, d'après 1(c) (on est dans le troisième cas), $\mathrm{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

(b) Soit $X \in E_{\mathrm{i}}$. Alors $AX = \mathrm{i}\,X$, donc $\overline{AX} = \overline{\mathrm{i}\,X}$. D'après les formules de produit matriciel (s'obtenant par produit et somme des coefficients), et d'après les règles de conjugaison (respectant produit et somme), on a alors :

$$\overline{AX} = -\,\mathrm{i}\,\overline{X}.$$

Comme A est à coefficients réels, on obtient finalement,

$$A\overline{X} = -\,\mathrm{i}\,\overline{X},$$

donc $\overline{X} \in E_{-\mathrm{i}}$.

Le même raisonnement montre que si $Y \in E_{-\mathrm{i}}$, alors $\overline{Y} \in E_{\mathrm{i}}$, d'où l'équivalence (avec $Y = \overline{X}$)

(c) Soit$(u_1, \dots, u_p)$ une base de E_i. Alors $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille de vecteurs de $E_{-\mathrm{i}}$, d'après ce qui précède. De plus, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{u_i} = 0.$$

En conjugant coefficient par coefficient, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_1} u_i = 0.$$

La famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre, donc il en résulte que

$$\overline{\lambda_1} = \cdots = \overline{\lambda_p} = 0 \qquad \text{puis:} \qquad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Ainsi, $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $E_{-\mathrm{i}}$.

Cette famille libre étant de cardinal p, on obtient

$$\dim(E_{-\mathrm{i}}) \geqslant p = \dim(E_{\mathrm{i}})$$

Le même raisonnement en partant d'une base de $E_{-\mathrm{i}}$ amène l'inégalité

$$\dim(E_{\mathrm{i}}) \geqslant \dim(E_{-\mathrm{i}}),$$

d'où l'égalité.

(d) On a $\mathrm{Sp}(A) = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$, et A est diagonalisable, donc

$$2n + 1 = \dim \mathbb{C}^{2n+1} = \dim E_{\mathrm{i}} + \dim E_{-\mathrm{i}} = 2 \dim E_{\mathrm{i}},$$

d'où une contradiction sur les parités.

Ainsi, l'hypothèse d'existence de A à coefficients réels telle que $A^2 = -I$ amène à une contradiction. Il n'existe donc pas de telle matrice.