Corrections Algèbre 4 – Formes bilinéaires, produits scalaires

Correction de l'exercice 11 –

- $\varphi(X, X) = (x - 2y)^2 + 3y^2$; c'est un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (x + 3y)^2$, positif mais non défini. Ce n'est pas un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (x + 2y)^2 - y^2$, non positif. Ce n'est pas un produit scalaire.
- Le 0 sur la diagonale permet de conclure directement. En effet, le k -ième terme de la diagonale correspond à $\varphi(e_k, e_k)$ (e_k étant le k -ième vecteur de la base canonique). Ainsi, on obtient immédiatement $\varphi(e_2, e_2) = 0$, donc φ n'est pas définie.
Remarquez que le même argument s'applique pour contredire la positivité si la matrice possède un coefficient diagonal négatif.
Ainsi, la matrice d'un produit scalaire (dans n'importe quelle base) possède des coefficients diagonaux tous strictement positifs.
- $\varphi(X, X) = (x + y - z)^2 = (2y + z)^2$. Non défini.
- $\varphi(X, X) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2$. C'est un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (2x - y + 2z)^2 + (2y - z)^2 + 3z^2$. C'est un produit scalaire.
- (désolé pour les coefficients mal alignés)
 $\varphi(X, X) = (x - y - z + 2t)^2 + (y - t)^2 + (z + t)^2 + t^2$, c'est un produit scalaire.
- $\Phi(X, X) = (x - y + u)^2 + (y - t - u)^2 + (z - t)^2 + (t - u)^2 + 4u^2$. C'est un ps.

Correction de l'exercice 12 –

- Φ est une norme (sans problème!)

Soit φ associée, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ∴ On a

$$N(X) = N(Y) = N(X + Y) = 2, \quad N(Z) = 1, \quad N(X + Z) = 1, \quad N(Y + Z) = 3, \quad N(X + Y + Z) = 3.$$

Ainsi,

- $2\varphi(X, Z) = N(X + Z)^2 - N(X)^2 - N(Z)^2 = 1 - 4 - 1 = -4$,
- $2\varphi(Y, Z) = 9 - 4 - 1 = 4$
- $2\varphi(X + Y, Z) = 9 - 4 - 1 = 4$,

Donc ce n'est pas une norme euclidienne (si $n \geq 2$)

- φ , fb canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

C'est un ps, car $\varphi(X, X) = (x - y + z)^2 + 4y^2 + 3z^2$. Donc Φ est une norme euclidienne.

- Norme euclidienne (canonique) si $p = 2$.

Dans les autres cas : considérer $X = (1, 0, \dots, 0)$, $Y = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $Z = (1, -1, 0, \dots, 0)$. Alors $\varphi(X + Y, Z) = \varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z)$ si et seulement si $2^p + 1 = (\sqrt{5})^p$

On a égalité pour $p = 2$,

- si $p > 2$, $2^p + 1 < 2^{2+(p-2)} + 2^{p-2} = 2^{p-2} \cdot 5 < (\sqrt{5})^{p-2} \cdot 5 = (\sqrt{5})^p$.
- si $p < 2$, $2^p + 1 > 2^{2+p-2} + 2^{p-2} = 2^{p-2} \cdot 5 > (\sqrt{5})^p$.

Ce n'est pas une norme euclidienne.

- Expression correcte : $\Phi(P) = \sqrt{P(a)^2 + P'(a)^2 + \dots + P^{(n)}(a)^2}$.

C'est une norme euclidienne, associée au ps :

$$\varphi(P, Q) = \sqrt{P(a)Q(a) + P'(a)Q'(a) + \dots + P^{(n)}(a)Q^{(n)}(a)}.$$

Caractère défini : $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots + P^{(n)}(a) = 0$, puis $P = 0$ (utiliser la formule de Taylor au point a)

5. norme euclidienne, ps associé : $\varphi(f, g) = \int_0^\pi f(t)g(t) \sin t \, dt$.
 caractère défini : stricte positivité de l'intégrale, et continuité des fonctions.
6. Considérer $f = 1$, $g = \cos$, $h = 1 - \cos$. Un peu de calcul et une comparaison de racines : ce n'est pas une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 13 – On note ψ le produit scalaire associé.

1. $\varphi(X, X) = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2$
 $\psi(X, Y) = xx' - xy' - x'y + 2yy'$; c'est un ps et $\psi(X, X) = \varphi(X, X)$.
 ψ est de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Remarquer qu'elle est obtenue de la matrice de ψ est « rééquilibrant » les coefficients afin d'obtenir une matrice symétrique
2. De même, $\varphi(X, X) = (2x - y + z)^2 + (2y + z)^2 + 2z^2$ et ψ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
3. De même, $\varphi(X, X) = (x - y + 2z + t)^2 + (y - 2z - t)^2 + (z + t)^2 + t^2$.

La matrice de ψ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 9 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 14 –

1. (a) • Soit $(A, B) \in (E_n)^2$, $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j$. Alors :

$$\Phi_n(B, A) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq j, i \leq n} a_j b_i s_{j+i},$$

les variables étant muettes. Ainsi, par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$,

$$\Phi_n(B, A) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} b_i a_j s_{j+i} = \Phi_n(A, B).$$

Ainsi, Φ_n est symétrique.

- Soit A, B et C dans E_n , avec les notations intuitives des coefficients, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi_n(\lambda A + B, C) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (\lambda a_i + b_i) c_j s_{i+j} = \lambda \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i c_j s_{i+j} + \sum_{0 \leq i, j \leq n} b_i c_j s_{i+j} = \lambda \Phi_n(A, C) + \Phi_n(B, C).$$

Ainsi, Φ_n est linéaire par rapport à sa première variable.

- Étant symétrique, elle est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable.

Ainsi, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique.

- (b) S_n est une application de E_{2n} dans $\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier qu'elle est linéaire.

Soit $(A, B) \in E_{2n}$, avec notation intuitive des coefficients, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$S_n(\lambda A + B) = \sum_{i=0}^{2n} (\lambda a_i + b_i) s_i = \lambda \sum_{i=0}^{2n} a_i s_i + \sum_{i=0}^{2n} b_i s_i = \lambda S_n(A) + S_n(B).$$

Ainsi, S_n est bien une forme linéaire. De plus, si A et B sont dans E_n , en écrivant

$$A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^n b_j X^j,$$

et en posant $a_i = 0$ pour tout $i > n$ et $b_j = 0$ pour tout $j > n$, on a :

$$AB = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k, \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Ainsi,

$$S_n(AB) = \sum_{k=0}^{2n} c_k s_k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} s_k = \sum_{0 \leq i \leq k \leq 2n} a_i b_{k-i} s_k = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=i}^{2n} a_i b_{k-i} s_k.$$

En effectuant dans la somme interne un changement d'indices $j = k - i$, il vient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} a_i b_j s_{i+j}.$$

Comme $a_i = 0$ si $i > n$, on obtient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-i} a_i b_j s_{i+j}.$$

Comme enfin, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $2n - i \geq n$, et que $b_j = 0$ si $j > n$, on obtient :

$$S_n(AB) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j s_{i+j} = \Phi_n(A, B).$$

J'ai fait ce calcul sans tenir compte de l'indication...

Si on veut se servir de l'indication, on peut faire de la façon suivante : soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$; soit $A = X^i$ et $B = X^j$. Alors

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k b_\ell s_{k+\ell},$$

où les a_k et les b_ℓ sont tous nuls, sauf $a_i = 1$ et $b_j = 1$ (attention à ne pas mélanger les variables i et j posées dans la définition de A et B et les variables muettes de sommation ; c'est la raison pour laquelle j'ai modifié ces variables). Ainsi

$$\Phi_n(A, B) = a_i b_j s_{i+j} = s_{i+j}.$$

De même on a $AB = X^{i+j}$, donc

$$S_n(AB) = \sum_{k=0}^{2n} c_k s_k,$$

où les c_k sont nuls, sauf $c_{i+j} = 1$, donc $S_n(AB) = s_{i+j}$. Ainsi, on a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$:

$$S_n(X^i \cdot X^j) = \Phi_n(X^i, X^j).$$

Soit maintenant $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, et $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j$. Alors, par linéarité de S_n et par bilinéarité de Φ_n et du produit, on a :

$$\begin{aligned} S_n(AB) &= S_n \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j X^i \cdot X^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j S_n(X^i \cdot X^j) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \Phi_n(X^i, X^j) \\ &= \Phi_n \left(\sum_{i=0}^n a_i X^i, \sum_{j=0}^n b_j X^j \right) = \Phi_n(A, B). \end{aligned}$$

2. Deux cas particuliers

(a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_1(aX + b, aX + b) &= b^2 s_0 + (ab + ba) s_1 + a^2 s_2 = b^2 + 2abs_1 + a^2 s_2 \\ &= (b + as_1)^2 + a^2 s_2 - a^2 s_1^2 = (b + 2as_1)^2 + a^2 (s_2 - s_1^2). \end{aligned}$$

- Si $s_2 - s_1^2 > 0$, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) \geq 0,$$

et on a égalité si et seulement si $b + 2as_1 = 0$ et $a = 0$ (car une somme de termes positifs est nul si et seulement si chaque terme est nul). Ainsi $a = b = 0$. Comme tout polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ s'écrit sous la forme $aX + b$, on en déduit la définie positivité de Φ_1

- Réciproquement, si $s_2 - s_1^2 \leq 0$, en prenant $a = 1$ et $b = -2s_1$, il vient :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = s_2 - s_1^2 \leq 0,$$

ce qui contredit soit la positivité soit le caractère défini, suivant que cette égalité est stricte ou non. Ainsi, Φ_n n'est pas un produit scalaire.

Par conséquent, Φ_n est un produit scalaire si et seulement si $s_2 - s_1^2 > 0$.

- (b) De même, étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_2(aX^2 + bX + c, aX^2 + bX + c) = c^2 s_0 + (bc + cb)s_1 + (ac + b^2 + ca)s_2 + (ab + ba)s_3 + a^2 s_4 = c^2 + (b^2 + 2ac)s_2 + a^2 s_4.$$

On effectue une mise sous forme canonique, comme dans la question précédente :

$$\Phi_2(aX^2 + bX + c, aX^2 + bX + c) = (c + as_1)^2 + b^2 s_2 + a^2 (s_4 - s_1^2).$$

- Si $s_2 > 0$ et $s_4 - s_1^2 > 0$, alors cette expression est toujours positive, et nulle si et seulement si $c + as_1 = 0$, $b = 0$ et $a = 0$, donc $a = b = c = 0$. Ainsi, dans ce cas Φ_2 est définie positive, c'est donc un produit scalaire.
- Si $s \leq 0$, alors, en posant $b = 1$, $a = c = 0$, on obtient :

$$\Phi_2(X, X) = s_2 \leq 0,$$

ce qui contredit soit la positivité, soit le caractère défini.

- Si $s_4 - s_2^2 \leq 0$, en posant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -s_1$, encore une fois, on trouve une contradiction soit à la positivité soit au caractère défini.

Donc Φ_2 est un produit scalaire si et seulement si $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

Correction de l'exercice 15 – Soit $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{1+t^2} dt$, définie sur $\mathcal{C}^0([0, 1])^2$.

- La bilinéarité du produit dans $\mathbb{R}$, ainsi que la linéarité de l'intégrale, assurent la bilinéarité de φ .
- La commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ assure la symétrie de φ .
- Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, on a :

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2} dt,$$

et la fonction $t \mapsto \frac{f^2(t)}{1+t^2}$ étant positive sur $[0, 1]$, on obtient, par positivité de l'intégrale, $\varphi(f, f) \geq 0$. D'où la positivité de φ .

- De plus, si $\varphi(f, f) = 0$, alors, $t \mapsto \frac{f^2(t)}{1+t^2}$ étant positive et continue sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{f^2(t)}{1+t^2} = 0 \quad \text{donc:} \quad \forall f \in [0, 1], \quad f(t) = 0.$$

Ainsi, φ est définie positive.

Il en résulte que φ est un produit scalaire. Notons-le $\langle -, - \rangle$. Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associé à ce produit scalaire, on a, pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, en notant $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| &= |\langle f, \mathbf{1} \rangle| \leq \|\mathbf{1}\| \cdot \|f\| = \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\text{Arctan} \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} 0 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si f et $\mathbf{1}$ sont colinéaires, donc si f est constante.

De la même façon, en notant $g : x \mapsto \sqrt{x}$, fonction de $\mathcal{C}^0([0, 1])$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2} dt \right| &= |\langle f, g \rangle| \leq \|g\| \cdot \|f\| = \left(\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si f et g sont colinéaires, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)\lambda\sqrt{t}$.

Remarque : On aurait pu s'en sortir avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$, en considérant le produit scalaire des deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ pour la première inégalité, et le produit scalaire de $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ pour la deuxième.