

## Algèbre 6 – Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

### Correction de l'exercice 9 –

1. Les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques réelles, donc diagonalisables.
2. On a, en notant  $C_1, C_2, C_3, C_4$  les colonnes de  $A$  :

$$A^2 = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A.$$

De même, en notant  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$  les colonnes de  $B$  :

$$B^2 = (C'_1 - C'_3, C'_2 - C'_4, -C'_1 + C'_3, -C'_2 + C'_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B.$$

Ainsi :

- le polynôme  $X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ , dont les racines sont 0 et 4. Par conséquent,  $\text{Sp}(A) \subset \{0, 4\}$ . Puisque  $A$  est diagonalisable,  $A$  possède au moins une valeur propre. Si  $A$  ne possédait qu'une valeur propre  $\lambda$ , puisqu'elle est diagonalisable, elle serait égale à la matrice d'une homothétie,  $A = \lambda I_4$ , ce qui n'est clairement pas le cas ! Ainsi,  $A$  admet au moins deux valeurs propres distinctes. L'inclusion ci-dessus, et la condition obtenue sur le cardinal de  $\text{Sp}(A)$  amène donc en définitive :  $\text{Sp}(A) = \{0, 4\}$ .
- De même, le polynôme  $X^2 - 2X$  est un polynôme annulateur de  $B$ , de racines 0 et 2, donc  $\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$ . Le même argument que pour  $A$  amène l'égalité :  $\text{Sp}(B) = \{0, 2\}$ .
- 3. • Les colonnes de  $A$  sont non nulles et toutes identiques, donc  $A$  est de rang 1. Ainsi, le sous-espace propre  $E_0(A)$  de  $A$  associé à la valeur propre 0, égal à  $\text{Ker}(a)$ , est de dimension  $4-1=3$ , d'après le théorème du rang. Or, les relations

$$C_1 - C_2 = 0, C_1 - C_3, \text{ et } C_1 - C_4 \text{ entre les colonnes de } A \text{ montrent que les vecteurs } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sont dans } E_0. \text{ De plus, ces vecteurs forment une famille libre, car ils sont échelonnés selon leur dernière}$$

coordonnée non nulle. Comme  $\dim E_0(A) = 3$ , on en déduit que  $(b_1, b_2, b_3)$  est une base de  $E_0(A)$ .

- Puisque 4 est la seule autre valeur propre de  $A$ , et que  $A$  est diagonalisable, on en déduit que :

$$\dim E_4(A) = 4 - \dim E_0(A) = 1.$$

Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans  $E_4(A)$ . D'après un argument qu'on a eu l'occasion de développer ensemble, puisque  $A$  est symétrique de rang 1, un vecteur propre associé à la valeur propre non nulle sera forcément

donné par une colonne non nulle de  $A$ , donc  $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Le calcul suivant :

$$Ab_4 = 4b_4$$

suffit amplement à justifier l'appartenance de  $b_4$  à  $E_4(A)$ , et par suite,  $E_4(A)$  étant de dimension 1,  $(b_4)$  est une base de  $E_4(A)$ .

- Les colonnes  $C'_3$  et  $C'_4$  de  $B$  sont colinéaires respectivement aux colonnes  $C'_1$  et  $C'_2$ , et de plus, les colonnes  $C'_1$  et  $C'_2$  sont non colinéaires, donc le rang de  $B$  est 2. Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme  $b$  :

$$\dim E_0(B) = \dim \text{Ker } b = 4 - \text{rg } b = 2.$$

Or, les relations  $C'_1 + C'_3 = 0$  et  $C'_2 + C'_4 = 0$  montrent que les vecteurs  $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont dans  $\text{Ker } b$  donc dans  $E_0(B)$ . Cet espace étant de dimension 2, et ces deux vecteurs étant non colinéaires,  $(c_1, c_2)$  est une base de  $E_0(B)$ .

- Puisque 2 est la seule autre valeur propre de  $B$ , et que  $B$  est diagonalisable, on en déduit que :

$$\dim E_2(B) = 4 - \dim E_0(B) = 2.$$

Or,  $B - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  Les colonnes  $C''_1, C''_2, C''_3, C''_4$  de cette matrice vérifient  $C''_1 - C''_3 = 0$  et

$C''_2 - C''_4 = 0$ , donc les vecteurs  $c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont dans  $E_2(B)$ . Comme ils sont non colinéaires, et que

$E_2(B)$  est de dimension 2, on en déduit que  $(c_3, c_4)$  est une base de  $E_2(B)$ .

4. On recherche une base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  orthonormale, formée de vecteurs propres communs de  $A$  et de  $B$ . Pour cela, on détermine l'intersection des espaces propres de  $A$  et des espaces propres de  $B$ .

- Une vérification rapide montre que  $c_3 \in E_0(A)$  et  $c_4 \in E_0(A)$ , donc  $E_2(B) \subset E_0(A)$ . Donc :

$$* E_2(B) \cap E_0(A) = E_2(B) = \text{Vect}(c_3, c_4)$$

$$* E_2(B) \cap E_4(B) = \{0\}$$

- Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_0(B) \cap E_0(A)$ , alors  $AX = 0$  et  $BX = 0$ , ce qui fournit les équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} x = -y \\ x = z \\ y = t \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

Ainsi,  $E_0(B) \cap E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(c_1 - c_2)$ .

- Une vérification rapide montre que  $b_4 = c_1 + c_2$ , donc  $b_4 \in E_0(B)$ . Ainsi,  $E_4(A) \subset E_0(B)$ , donc

$$E_4(A) \cap E_0(B) = E_4(A) = \text{Vect}(b_4).$$

De plus, la famille  $(c_3, c_4, c_1 - c_2, b_4)$  est une famille orthogonale (vérification immédiate, ou alors on peut le justifier par le fait que  $c_3 \perp c_4$  par coup de chance, puis que  $c_1 - c_2$  est dans  $E_0(B)$  qui est orthogonal à  $E_2(B)$  contenant en particulier  $c_3$  et  $c_4$ , et enfin que  $b_4$  est dans  $E_4(A)$ , qui est orthogonal à  $E_0(A)$ , qui contient en particulier  $c_3, c_4$  et  $c_1 - c_2$ ) Cette famille orthogonale ne contient pas de vecteur nul, donc elle est libre, et de cardinal 4, donc c'est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Elle est formée, d'après les choix effectués, de vecteurs propres à la fois de  $A$  et de  $B$ . Il suffit donc de normaliser cette famille. On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  est orthonormale, et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) La matrice  $A$  étant symétrique réelle, il existe une base orthonormée  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ , associés respectivement aux valeurs propres (non nécessairement distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^n z_i e'_i$  (autrement dit,  $X' = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  est le vecteur des coordonnées de  $x$  dans la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$ ). Alors,

$$f(x) = {}^t X A X = \langle X, A X \rangle = \langle x, u(x) \rangle,$$

où  $u$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ . Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de  $u$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\langle \sum_{i=1}^n z_i e'_i, u \left( \sum_{i=1}^n z_i e'_i \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n z_i e'_i, u \sum_{j=1}^n z_j u(e'_j) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n z_i e'_i, u \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j e'_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j \lambda_j \langle e'_i, e'_j \rangle. \end{aligned}$$

Comme la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$  est orthonormale,  $\langle e'_i, e'_j \rangle = 0$  sauf si  $i = j$ , et il reste donc :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2.$$

De plus,

$$\langle p, x \rangle = \left\langle p, \sum_{i=1}^n z_i e'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \langle p, e'_i \rangle.$$

On pose  $p'_i = \langle p, e'_i \rangle$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On reconnaît les coordonnées du vecteur  $p$  dans la base orthonormale  $(e'_1, \dots, e'_n)$ . On obtient alors :\*

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (z_i p'_i - \lambda_i z_i^2).$$

Ainsi, dans cette formule, la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$  est une base de vecteurs propres de  $A$ , les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres correspondantes, et le  $p'_i$  sont les coordonnées de  $p$  dans cette base.

- (b) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et soit  $g_i$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_i(y) = y p'_i - \lambda_i y^2$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynomiale) et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'_i(y) = p'_i - 2\lambda_i y.$$

Comme  $\lambda_i > 0$  d'après l'énoncé (c'est une valeur propre de  $A$ ,  $g'_i$  est positive sur  $] -\infty, \frac{p'_i}{2\lambda_i}]$ , et négative sur  $[\frac{p'_i}{2\lambda_i}, +\infty[$ . Ainsi,  $g_i$  présente un maximum  $M_i$  au point  $\frac{p'_i}{2\lambda_i}$ .

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (z_i p'_i - \lambda_i z_i^2) = \sum_{i=1}^n g_i(z_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i.$$

Ainsi,  $F$  est majorée par la quantité  $\sum_{i=1}^n M_i$

De plus, en posant  $x_0 = \sum \frac{p'_i}{2\lambda_i} \cdot e'_i$ , il vient :

$$F(x_0) = \sum_{i=1}^n g_i \left( \frac{p'_i}{2\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Ainsi,  $\sum_{i=1}^n M_i$  est un majorant de  $F$ , et ce majorant est atteint au point  $x_0$ . C'est le maximum de  $F$ .

On définit alors l'application  $L(f) : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$L(f)(p) = \max_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x)).$$

Cette application est appelée transformée de Legendre de  $f$ .

2. (a) Nous avons montré plus haut que pour tout  $p \in E$ ,

$$L(f)(p) = \sum_{i=1}^n g_i \left( \frac{p'_i}{2\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{p'_i}{2\lambda_i} p'_i - \lambda_i \frac{p_i'^2}{4\lambda_i^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i'^2}{4\lambda_i} = {}^t P' D' P',$$

où  $D'$  est la matrice diagonale dont le  $i$ -ième terme diagonal est égal à  $\frac{1}{4\lambda_i}$ , et  $P'$  le vecteur des coordonnées de  $p$  dans la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

Soit  $D$  la matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont égales aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , dans cet ordre. Alors on a  $D' = \frac{1}{4} D^{-1}$ . De plus, d'après le choix de la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , si  $Q$  désigne la matrice de passage de la base canonique à la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , la formule de changement de base sur l'endomorphisme canoniquement associé à  $a$  donne la relation :

$$D = Q^{-1} A Q = {}^t Q A Q,$$

puisque la matrice  $Q$  est orthogonale (en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormales). De plus la relation entre les vecteurs coordonnées de  $p$  s'écrit alors :

$$P = Q P' \quad \text{soit:} \quad P' = {}^t Q P.$$

Ainsi, on obtient :

$$L(f)(p) = \frac{1}{4} {}^t (Q P) D^{-1} (Q P) = \frac{1}{4} {}^t P {}^t Q D^{-1} Q P.$$

Soit  $B = \frac{1}{4} {}^t Q D^{-1} Q$ . On a

$$(Q D^{-1} Q) \cdot A = {}^t Q D^{-1} Q {}^t Q D Q = {}^t Q D^{-1} D Q = {}^t Q Q = I_n,$$

donc en fin de compte,  $B = \frac{1}{4} A^{-1}$ . Alors, cette matrice vérifie la relation

$$L(f)(p) = {}^t P B P.$$

- (b) Tout d'abord,  $L(f)$  est bien une fonction s'écrivant de la même façon que  $f$  (une forme quadratique), donc on peut bien appliquer  $L$  une nouvelle fois à  $L(f)$ . D'après la question précédente, il existera une matrice  $C$  telle que

$$\forall x \in E, \quad L(L(f))(x) = {}^t X C X,$$

où  $C = \frac{1}{4} B^{-1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} A^{-1} \right)^{-1} = A$ . Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad L(L(f))(x) = f(x) \quad \text{soit:} \quad L(L(f)) = f.$$

Ainsi,  $L$  est une involution sur l'ensemble des formes quadratiques.

### Correction de l'exercice 14 – (D'après Ecricome 2000)

1. • Les matrices de type  $-1$  vérifient  ${}^t A = A^{-1}$  : ce sont les matrices orthogonales.
- Les matrices de type  $0$  vérifient  ${}^t A = I_m$  : il n'y a que la matrice identité
- Les matrices de type  $1$  vérifient  ${}^t A = A$  : ce sont les matrices symétriques

2. (a) On a :

$$A^{(n^2)} = (A^n)^n = ({}^t A)^n = {}^t (A^n) = {}^t ({}^t A) = A, \quad \text{donc:} \quad \boxed{A^{(n^2)} = A}.$$

- (b) On a :

$$B^n = (A^{n+1})^n = A^{n(n+1)} = A^{n^2} A^n = A \cdot A^n = A^{n+1}, \quad \text{donc:} \quad \boxed{B^n = B}.$$

De plus,  $B = A \cdot A^n = A \cdot {}^t A$ , donc  ${}^t B = {}^t ({}^t A) \cdot {}^t A = A \cdot {}^t A = B$ . Ainsi,  $B$  est symétrique.

- (c) La matrice  $B$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ses valeurs propres sont donc toutes réelles. De plus,  $B$  vérifie  $B^n = B$ , donc  $P = X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$  est un polynôme annulateur de  $B$ . Puisque les valeurs propres de  $B$  sont réelles, on peut alors affirmer que :

$$\text{Sp}(B) \subset \text{rac}_{\mathbb{R}}(P) \subset \{0, -1, 1\}.$$

Plus précisément, si  $n$  est impair, on peut uniquement dire  $\text{Sp}(B) \subset \{0, -1, 1\}$ , et si  $n$  est pair,  $\text{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$ .

- (d) • Puisque  $V$  est un vecteur propre associé à  $-1$ ,  ${}^tVBV = -{}^tVV = -\|V\|^2 < 0$ , puisque  $V \neq 0$ .  
 • Par ailleurs,  $B = A {}^tA$ , donc  ${}^tVBV = {}^tVA {}^tAV = {}^t({}^tAV)({}^tAV) = \|{}^tAV\|^2 \geq 0$ .  
 Ainsi, les deux points précédents sont contradictoires, donc l'hypothèse de l'existence d'un vecteur propre associé à  $-1$  est fautive, donc  $-1$  n'est pas valeur propre de  $B$ .
- (e) La matrice  $B$  étant diagonalisable, et ne possédant comme seules valeurs propres que 0 et 1 (au plus), il existe une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$ , constituée uniquement de 0 et de 1 sur la diagonale, telle que  $B = PDP^{-1}$ . On a alors  $D^2 = D$ , donc,

$$B^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B.$$

Ainsi,  $B$  est la matrice d'un projecteur. D'après la description géométrique des projecteurs, il s'agit du projecteur sur  $F_B$  parallèlement à  $E_B$ . Or, d'après une propriété des projecteurs,  $F_B$  est le sous-espace propre associé à 1, et  $E_B$  est bien sûr le sous-espace propre associé à 0.

Comme les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux, on en déduit que  $B$  est la matrice d'un proj

Remarque : dans ce raisonnement, et dans la suite, nous ne sommes pas certain que 0 et 1 sont effectivement des valeurs propres ; nous parlons tout de même des sous-espaces propres associés ; il est sous-entendu qu'il s'agit de l'espace  $\{0\}$  si ce n'est pas une valeur propre, et on vérifie sans problème que toutes les affirmations restent vraies dans ce cas trivial.

3. (a) Soit  $X \in E_B$ . On a  $BX = 0$ , donc  $A^{n+1}X = 0$ , donc  ${}^tAAX = 0$ , donc  ${}^tX {}^tAAX = 0$ , donc  $\|AX\|^2 = 0$ , donc  $AX = 0$ , donc  $X \in E_A$ . Ainsi  $E_B \subset E_A$ .  
 Réciproquement, si  $AX = 0$ , alors, puisque  $n > 1$ ,  $A^{n+1}X = A^nAX = 0$ , donc  $BX = 0$ . Donc  $E_A \subset E_B$ .  
 Les deux inclusions amènent l'égalité  $E_A = E_B$ .
- (b) Soit  $X \in F_B$ . Il existe  $Y$  tel que  $X = BY = A^{n+1}Y = A(A^nY)$ . En posant  $Z = A^nY$ , il existe donc  $Z$  tel que  $X = AZ$ , donc  $X \in F_A$ . Ainsi,  $F_B \subset F_A$ .  
 De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim(F_A) = m - \dim(E_A) = m - \dim(E_B) = \dim(F_B).$$

Ainsi, l'inclusion et l'égalité des dimensions amènent l'égalité :  $F_A = F_B$ .

Nous avons déjà justifié que  $E_B$  et  $F_B$  sont les deux sous-espaces propres de  $B$ , et qu'ils sont orthogonaux. Donc, puisque  $B$  est diagonalisable,  $E_B$  et  $F_B$  sont supplémentaires orthogonaux. Puisque  $E_A = E_B$  et  $F_A = F_B$ , on en déduit que  $E_A$  et  $F_A$  sont supplémentaires orthogonaux.

4. Soit  $U$  un vecteur de  $F_A = F_B$ . On a alors,  $B$  étant un projecteur,  $BU = U$ . Ainsi, puisque  $B = A^nA = {}^tAA$ ,

$$\|AU\|^2 = {}^tU {}^tAAU = {}^tUBU = {}^tUU = \|U\|^2,$$

et donc  $\|AU\| = \|U\|$ .

5. Si  $A$  est inversible, alors  $B = A^{n+1}$  est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de  $B$ . Ainsi, 1 étant la seule valeur propre de  $B$  et  $B$  étant diagonalisable,  $B = I_m$ . On en déduit que  $A^nA = I_m$ , donc  ${}^tAA = I_n$ , donc  $A^{-1} = {}^tA$ . Ainsi,  $A$  est de type  $-1$  (c'est-à-dire orthogonale).
6. Supposons  $A$  de type  $n$  et  $n+1$ . Alors  ${}^tA = A^{n+1} = B$ , et  $B$  étant symétrique,  $A = B$ . Donc, d'après ce qui précède,  $A$  est une matrice de projecteur orthogonal.

**Correction de l'exercice 15** – La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le réel  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A - \lambda I_4$  est de rang inférieur ou égal à 3. Déterminons ce rang par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_4 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & L_4 \leftrightarrow L_1 \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)L_1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & -\lambda & -2\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 - L_3 \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -7\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda
\end{aligned}$$

Cette matrice triangulaire est de rang au plus 3 si et seulement si au moins un terme de sa diagonale est nulle, donc si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 7$ .

La matrice  $M_0$  est de rang 1, donc  $E_0$  est de dimension 3. Or, les colonnes de  $A$  vérifient  $2C_1 - C_2 = 0$ ,  $C_3 - C_4 = 0$  et  $C_1 + C_3 = 0$ . Ainsi, les vecteurs  $e_1 = (2, -1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 0, 1, -1)$  et  $e_3 = (1, 0, 1, 0)$  sont dans  $E_0$ , et libres (échelonnés par rapport à leur dernière coordonnée non nulle). Par conséquent, la dimension de  $E_0$  étant 3, ils forment une base de  $E_0$ . De plus, les deux premiers sont orthogonaux, ce qui nous facilitera la tâche d'orthonormalisation. Soit  $(f_1, f_2, f_3)$  la b.o.n. obtenue de  $(e_1, e_2, e_3)$  par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On a, puisque  $e_1 \perp e_2$ ,

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0, 0) \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1).$$

Alors,

$$f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \quad \text{où} \quad u_3 = e_3 - \langle e_3, f_1 \rangle f_1 - \langle e_3, f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{10}(2, 4, 5, 5).$$

On obtient donc :

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(2, 4, 5, 5).$$

Ainsi,  $(f_1, f_2, f_3)$  est une b.o.n. de  $E_0$ .

La matrice  $M_7$  vaut  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Elle est de rang 3, et ses colonnes vérifient :

$$C_4 + C_3 - 2C_2 - C_1 = 0,$$

donc  $E_7 = \mathbb{R}(-1, -2, 1, 1)$ . Un vecteur unitaire de  $E_7$  est donc  $f_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, -2, 1, 1)$ .

Puisque  $A$  est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une b.o.n. de  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique dans cette b.o.n.. On a donc

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{70}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Puisque  $P$  est la matrice de passage entre 2 bases orthonormales,  $P$  est une matrice orthogonale, et on obtient donc finalement

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Remarquez que 7 est le carré de la norme de la première colonne, et que le vecteur propre trouvé est (à un coefficient près) la première colonne de  $A$ . Cela n'est pas anodin, c'est le cas pour toute matrice symétrique de rang 1. Pourquoi ?

**Correction de l'exercice 16** – Soit  $y = mx + p$  l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ . Ainsi,  $m$  et  $p$  minimisent l'expression :

$$(2 - m - p)^2 + (-1 - p)^2 + (2 - 2m - p)^2 + (-2 + m - p)^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 - m - p \\ -1 - p \\ 2 - 2m - p \\ -2 + m - p \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Ainsi, le couple  $(m, p)$  minimise l'expression  $\|AX - B\|$ , où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème des moindres carrés, cette expression atteint son minimum en une valeur  $(m, p)$  solution de l'équation  ${}^tAA \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = {}^tAB$ . Ainsi, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 6m + 2p &= 8 \\ 2m + 4p &= 1 \end{cases}$$

Ainsi,  $m = \frac{3}{2}$  et  $p = -\frac{1}{2}$ .

La droite de régression de  $y$  en  $x$  est donc la droite d'équation  $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .