Analyse 1bis – Plus d'exercices sur les suites

Correction de l'exercice 1 –

1. Indication : par définition de la limite (par ε), à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ sera majoré par $\frac{1+\ell}{2}$ qui est strictement supérieur à ℓ. À partir de ce rang, on peut minorer (u_n) par une suite géométrique de raison $\frac{1+\ell}{2} < 1$ (raisonnement classique, aussi utilisé pour les séries). Comme (u_n) est positive, on en déduit par encadrement qu'elle admet une limite nulle.
2. Si on minore $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ par 1 à partir d'un certain rang, on obtient la croissance stricte (donc l'existence d'une limite finie ou infinie) de (u_n). Cet argument suffit souvent pour l'étude des séries, mais n'est pas suffisant ici pour obtenir la valeur de la limite de (u_n). Procéder comme dans la question précédente, en minorant à partir d'un certain rang (u_n) par une suite géométrique de raison $\frac{1+\ell}{2} > 1$.
3. Appliquer les résultats précédentes. En notant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a,$$
ainsi :
   - si $a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
   - si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
   - si $a = 1$, on obtient facilement :
     * si $b > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
     * si $b = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$;
     * si $b < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n+1} = 0$. Donc $\lim u_n = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $A = u_0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$. Alors, $E = \{u_n, \text{ tq } u_n \leqslant A,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini, car $E \subset [\![1, n_0]\!]$. En effet pour tout $n > n_0$, $u_n > A$, donc $u_n \notin E$. De plus E est non vide, puisque $u_0 \in E$. Par conséquent, E admet un plus petit élément u_k. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - soit $u_n \in E$, et donc $u_k \leqslant u_n$ par définition de u_k ;
   - soit $u_n \notin E$, et donc $u_n > A \leqslant u_k$.

   Ainsi, u_k est un minorant, et donc le plus petit élément, de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si $(u_n)_s u$ est constante, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un singleton, donc admet à la fois un plus petit et un plus grand élément.

   Supposons donc que u_n est non constante. Il existe donc k tel que $u_k \neq \ell$. Supposons que $u_k > \ell$ (le cas $u_k < \ell$ se démontre de la même façon). Alors soit $\varepsilon = u_k - \ell$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n < \ell + \varepsilon = u_k$. Soit $E = \{u_n, n \in \mathbb{N},\ \text{td } u_n \geqslant u_k\}$. D'après ce qui précède, $E \subset [\![0, N]\!]$, et est donc fini. De plus, $u_k \in E$. Donc E admet un élément maximum. Comme dans la question précédente, cet élément est aussi l'élément maximum de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

   Pour ne pas pouvoir faire ce raisonnement pour l'élément maximum, il faudrait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant \ell$. Si cela est vérifié, et qu'il existe k tel que $u_k = \ell$, alors u_k est clairement l'élément maximum de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour qu'il n'existe pas d'élément maximum, il faut donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.

   Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$, alors ℓ est la borne supérieure de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. En effet, c'est un majorant, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ell - \varepsilon$. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell - \varepsilon$. D'après la caractérisation par epsilon des bornes supérieures, ℓ est la borne supérieure de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\ell \notin \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, cet ensemble n'admet pas d'élément maximum.

   Ainsi, les suites convergentes telles que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de maximum (et admet donc un minimum) sont les suites convergeant vers leur limite par valeurs strictement inférieures. De même, les suites convergentes telles que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de minimum (et admet donc un maximum) sont les suites convergeant vers leur limite par valeurs strictement supérieures.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, on obtient par le raisonnement précédent l'existence d'un maximum de $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Soit p_1 tel que u_{p_1} soit ce maximum. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant u_{p_1}$, et en particulier, pour tout $n\geqslant p_1$, $u_n\leqslant u_{p_1}$
Alors $\{u_n,\ n>p_1\}$ admet pour la même raison un maximum (ce sont les termes de la suite définie par $v_n=u_{n+p_1+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc on peut appliquer le résultat précédent à cette suite). Soit p_2 tel que u_{p_2} réalise ce maximum. Alors, de même que précédemment, pour tout $n\geqslant p_2$, $u_n\leqslant u_{p_2}$. De plus $p_2>p_1$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et supposons construits $p_1<p_2<\cdots<p_k$ tels que pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, et pour tout $n\geqslant p_i$, $u_n\leqslant p_i$. Alors $\{u_n,\ n>p_k\}$ admet pour la même raison un maximum. Soit p_{k+1} tel que $u_{p_{k+1}}$. Alors $p_{k+1}>p_k$, et pour tout $n\geqslant p_{k+1}$, $u_n\leqslant u_{p_{k+1}}$.
D'après le principe de récurrence, on a donc construit une infinité d'entiers p_i tels que pour tout $n\geqslant p_i$, $u_n\leqslant u_{p_i}$.

Correction de l'exercice 3 –

1. Tout d'abord, $u_1=f(u_0)=f(1)=\sqrt{2}$. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que u_n est bien défini et vérifie les égalités requises.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_{2n} et u_{2n+1} sont définis, et $\begin{cases} u_{2n}>0\\ u_{2n+1}>1\end{cases}$.
On a : $u_0=1>0$ et $u_1=\sqrt{2}>1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors $u_{2n+1}\in D_g=]1,+\infty[$, donc u_{2n+2} est bien défini, et :
$$u_{2n+2}=g(u_{2n+1})=\frac{1}{u_{2n+1}-1}>0,$$
l'inégalité provenant du fait que $u_{2n+1}>1$. Ainsi, $u_{2n+2}\in D_f=[0,+\infty[$, donc u_{2n+3} est bien définie, et
$$u_{2n+3}=f(u_{2n+2})=\sqrt{1+u_{2n+2}}>1,$$
puisque $u_{2n+2}>0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
2. Tout d'abord, $g\circ f(x)$ est bien défini pour tout $x\in]0,+\infty[$ (première chose à faire de manière générale : s'assurer que les objets dont on parle sont bien définis). En effet, pour tout $x>0$, $f(x)>1$, donc $f(x)\in D_g$. Ainsi, $D_{g\circ f}=]0,+\infty[$.
La fonction $x\mapsto x+1$ est croissante sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction $y\mapsto\sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f étant la composée de ces deux fonctions croissantes, f est croissante.
N'oubliez pas de bien préciser que la première fonction qu'on applique prend ses valeurs dans le domaine sur lequel on étudie la monotonie de la seconde fonction.
Vous pouvez aussi bien sûr étudier les variations de f en dérivant f. N'oubliez pas dans ce cas de préciser la dérivabilité avant de dériver.
La fonction $x\mapsto x-1$ est croissante sur $]1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $y\mapsto\frac{1}{y}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, g étant la composée de ces deux fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, g est décroissante.
Ainsi, $g\circ f$ est la composée d'une application croissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$, et d'une application décroissante sur $]1,+\infty[$. Elle est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Soit $\Phi:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x)=g\circ f\circ g\circ f$. La fonction φ est la composée de deux fonctions décroissantes (on compose $g\circ f$ avec elle-même). Donc φ est croissante.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_{4n+4}=g(u_{4n+3})=g\circ f(u_{4n+2})=g\circ f\circ g(u_{4n+1})=g\circ f\circ g\circ f(u_{4n})=\varphi(u_{4n}).$$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_{4n}$ est donc définie par la condition initiale $v_0=u_0=1$ et la relation de récurrence, valable pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\varphi(v_n)$, où φ est croissante.
Un résultat du cours nous dit qu'alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Vous n'êtes pas censés appliquer directement ce résultat, mais vous devez refaire sa démonstration dans ce cas précis. Allons-y !
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_{4n+4}\geqslant u_{4n}$.
Tout d'abord,
   (a) $u_1=\sqrt{2}$, donc :
   (b) $u_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, donc :

(c) $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc :

(d) $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{1+\sqrt{2}}) > \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 1.$

Ainsi, $u_4 > u_0 = 1$, d'où $\mathcal{Q}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$. Alors, φ étant croissante, elle préserve les inégalités (larges), donc :

$$\varphi(u_{4n}) \leqslant \varphi(u_{4n+4}), \qquad \text{soit :} \qquad u_{4n+4} \leqslant u_{4n+8}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. On sait déjà que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Une chose à bien retenir : dans le cas d'une suite définie par récurrence, si elle est croissante et majorée, elle est notamment majorée par sa limite, qui est un point fixe de la fonction définissant la récurrence (dans le cas où cette fonction est continue). Donc, pour deviner un majorant possible, il peut être utile de déterminer les points fixes de la fonction définissant la récurrence.

Déterminons donc les points fixes de φ. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{,} \qquad \text{donc :} \qquad g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1), \qquad \text{donc :}$$

$$f \circ g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}, \qquad \text{donc :}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}-1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}+1}{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = x &\iff \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}+1}{\sqrt{1+x}+1} = 1 \\
&\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}+1 = \sqrt{1+x}+1 \\
&\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1} = \sqrt{1+x} \\
&\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1 = 1+x \qquad \text{(équivalent car tout est positif)} \\
&\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1) = x \\
&\iff \sqrt{1+x} = x^2-1 \\
&\iff (x^2-1)^2-(1+x) = 0 \\
&\iff ((x-1)^2(x+1)-1)(x+1) = 0 \\
&\iff ((x-1)(x^2-1)-1)(x+1) = 0 \\
&\iff (x^3-x^2-x)(x+1) = 0 \\
&\iff x(x+1)(x^2-x-1) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(x) = x$ si et seulement si $x = 0$, $x = -1$, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La limite ℓ de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, *si elle existe,* est forcément une de ces quatre valeurs. En effet, φ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en passant à la limite dans la relation $u_{4n+4} = \varphi(u_{4n})$, on obtient $\ell = \varphi(\ell)$.

De plus, puisque $u_4 > 1$ et que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{4n} \geqslant u_4$, et par passage à la limite (toujours sous réserve d'existence), $\ell \geqslant u_4 > 1$. Donc, si la limite existe, elle vérifie $\ell > 1$. Ainsi, la seule valeur possible de ℓ est : $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soit $x_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que x_0 est un majorant de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leqslant x_0$.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $u_{4n} \leqslant x_0$.
On a $u_0 = 1 < x_0$, d'où $\mathcal{R}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$. Alors, φ étant croissante, $\varphi(u_{4n}) \leqslant \varphi(x_0)$, c'est-à-dire, puisque x_0 est un point fixe de φ : $u_{4n+4} \leqslant x_0$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{R}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
Pensez à bien exploiter le fait que x_0 est point fixe de φ.
Conclusion : $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle converge donc dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, sa limite est donc :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{4n} = x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. Déterminons les points fixes de f (dans $\mathbb{R}_+$, ce qui permet d'élever au carré sans problème) : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff 1+x = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$$
Or, ℓ a été défini comme une racine de ce polynôme, donc ℓ est un point fixe de f.
De même, déterminons les points fixes de g ($x > 1$, donc toutes les implications sont des équivalences, notamment la deuxième) : pour tout $x \in]1, +\infty[$:
$$g(x) = x \iff \frac{1}{x-1} = x \iff 1 = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$
Encore une fois, ℓ étant racine de ce polynôme, ℓ est point fixe de g.

6.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} = f(u_{4n})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f(u_{4n}))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1} = \ell$.
     La croissance de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leqslant u_{4n+4}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+1} \leqslant u_{4n+5}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} = g\circ f(u_{4n})$. Comme $g\circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(g\circ f(u_{4n}))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $g\circ f(\ell) = g(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+2} = \ell$.
     La croissance de $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} \leqslant u_{4n+5}$, donc, en appliquant la fonction g décroissante sur $]1, +\infty[$, $u_{4n+2} \geqslant u_{4n+6}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+3} = f\circ g\circ f(u_{4n})$. Comme $f\circ g\circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f\circ g\circ f(u_{4n}))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f\circ g\circ f(\ell) = f\circ g(\ell) = f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+3} = \ell$.
     La décroissance de $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \geqslant u_{4n+6}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+3} \geqslant u_{4n+7}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Soit $\varepsilon > 0$.
   - Puisque $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_0,\ \forall n \geqslant N_0,\ |u_{4n} - \ell| < \varepsilon$.
   - Puisque $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon$.
   - Puisque $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_2,\ \forall n \geqslant N_2,\ |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon$.
   - Puisque $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_3,\ \forall n \geqslant N_3,\ |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon$.

   Soit $N = \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$. On en déduit donc que :
$$\forall n \geqslant N, \begin{cases} |u_{4n} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \forall m \geqslant 4N,\ |u_m - \ell| < \varepsilon.$$
   Ainsi, le critère de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est bien vérifié.
   Cette démonstration est à retenir. Sachez la faire.

Correction de l'exercice 5 –

1. Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \geqslant 1$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \geqslant 1$, alors $\frac{1}{u_n} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1$.
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc en particulier $\frac{1}{u_n} \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \geqslant u_n$. Donc u_n est croissante. Elle converge donc soit vers un réel, soit vers $+\infty$. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Comme la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ (intervalle dans lequel (u_n) prend ses valeurs), on obtient, en passant à la limite dans l'équation de récurrence :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell},$$

d'où $\frac{1}{\ell} = 0$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, (u_n) ne converge pas vers un réel ℓ, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En élevant la relation de récurrence au carré : $u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$, et donc $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{u_{n-1}}^2$. Comme $\frac{1}{u_{n-1}}^2 \geqslant 0$, on obtient $u_n^2 - u_{n-1}^2 \geqslant 2$. D'autre part $u_{n-1}^2 \geqslant u_{n-1}$, car $u_{n-1} \geqslant 1$, et donc $\frac{1}{u_{n-1}^2} \leqslant \frac{1}{u_{n-1}} = u_{n-1} - u_n$. On obtient bien $2 \leqslant u_n^2 - u_{n-1}^2 \leqslant 2 + u_n - u_{n-1}$.
En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 - u_{k-1}^2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})$$

Ces sommes sont télescopiques, et on trouve donc : $2n \leqslant u_n^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1$.
4. On utilise les inégalités de la question précédente, qui donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - u_n \leqslant 2n \leqslant u_n^2 - 1$, d'où

$$1 - \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{2n}{u_n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{u_n^2}.$$

Comme (u_n) tend vers $+\infty$, $\left(\frac{2n}{u_n^2}\right)$ tend vers 1 (théorème d'encadrement), donc aussi $\left(\frac{\sqrt{2n}}{u_n}\right)$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Correction de l'exercice 6 –

1. Soit $n \geqslant 3$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1).$$

Ainsi :
- f_n' est négative sur $[0, 1]$, strictement sur $]0, 1[$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme f_n y est continue, d'après le théorème de la bijection et le théorème des valeurs interémédiaires, f_n se restreint sur $[0, 1]$ en une bijection sur son image $f_n([0, 1])$, et cette image est un intervalle d'extremités $f(0) = 1$ et $f(1) = 2 - n < 0$. Ainsi, $0 \in]2 - n, 1[$, donc 0 admet un unique antécédent dans $]0, 1[$ par f_n. Cela montre l'existence (et l'unicité) de α_n.
- f_n' est positive sur $[1, +\infty[$, strictement sur $]1, +\infty[$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Comme f_n y est continue, d'après le théorème de la bijection et le théorème des valeurs interémédiaires, f_n se restreint sur $[1, +\infty[$ en une bijection sur son image $f_n([1, +\infty[)$, et cette image est un intervalle d'extremités $f(1) = 2 - n < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Or, $0 \in]2 - n, +\infty[$, donc 0 admet un unique antécédent dans $]1, +\infty[$ par f_n. Cela montre l'existence (et l'unicité) de β_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, f_n est positive sur $[0, \alpha_n]$ et négative sur $[\alpha_n, 1]$.
Étudions le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$. Par définition de α_{n+1},

$$0 = \alpha_{n+1}^{n+1} - (n+1)\alpha_{n+1} + 1 = \alpha_{n+1} \cdot \alpha_{n+1}^n - n\alpha_{n+1} + 1 - \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}^n - n\alpha_{n+1} + 1 = f_n(\alpha_n),$$

l'inégalité découlant du fait que $\alpha_{n+1} \leqslant 1$ et $\alpha_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $f_n(\alpha_{n+1}) \geqslant 0$. On en déduit que $\alpha_{n+1} \in [0, \alpha_n]$. Ainsi, $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante. Elle est minorée par 0. Elle converge donc.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant \alpha_0 < 1$; ainsi, $0 \leqslant \alpha_n^n \leqslant \alpha_0^n$, et comme $0 < \alpha_0 < 1$, (α_0^n) tend vers 0. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (α_n^n) tend vers 0.
Soit ℓ la limite de $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$. Si $\ell \neq 0$, alors $\ell > 0$, et $(n\alpha_n)$ tend vers $+\infty$. Alors, en passant à la limite dans l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n^n - n\alpha_n + 1 = 0,$$

le terme de gauche tend vers $-\infty$, alors que le terme de droite est égal à 0, donc tend vers 0. On en déduit une contradiction. Ainsi, $\ell = 0$.

3. De plus, le raisonnement précédent montre que $(-n\alpha_n + 1)$ tend vers 0, donc que $(n\alpha_n)$ tend vers 1. Par définition des équivalents, on en déduit que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Soit $n \geqslant 3$. Alors :

$$\begin{aligned} f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)+1 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{n^{k/2}} - n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)+1 \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}\frac{2^k}{n^{k/2}} - n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)+1 \\ &= 1+\frac{2n}{\sqrt{n}}+\frac{4n(n-1)}{2n} - n - 2\sqrt{n}+1 \\ &= 1+2(n-1)-n+1 = n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.

(b) Encore une fois d'après le théorème de la bijection, pour tout $n \geqslant 3$, $\beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. On en déduit l'encadrement suivant de β_n :

$$\forall n \geqslant 3,\ 1 < \beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers $\ell = 1$.

(c) Pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\beta_n^n = n\beta_n - 1$, soit, en passant au logarithme : $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$. Or,

$$\ln(n\beta_n - 1) = \ln n + \ln(\beta_n - \frac{1}{n}).$$

Comme $\beta_n - \frac{1}{n}$ tend vers 1, $\ln(\beta_n - \frac{1}{n})$ tend vers 0, et comme $\ln n$ tend vers $+\infty$; on en déduit que $\ln(\beta_n - \frac{1}{n}) = o(\ln n)$. Ainsi, on obtient un équivalent de $n\ln(\beta_n)$:

$$n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n, \qquad \text{soit :} \qquad \ln(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Alors,

$$\beta_n - 1 = \mathrm{e}^{\ln(\beta_n)-1} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

On a utilisé l'équivalent $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim_{+\infty} u_n$ si (u_n) tend vers 0, ce qui est possible ici, du fait que $\ln(\beta_n)$ tend vers 0, puisqu'elle est équivalente à $\frac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Ainsi :

$$\beta_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Correction de l'exercice 7 –

1. Les 20 premières valeurs de F_n (c'est-à-dire de 0 à 19) :

$F_0 = 0$	$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 2$	$F_4 = 3$
$F_5 = 5$	$F_6 = 8$	$F_7 = 13$	$F_8 = 21$	$F_9 = 34$
$F_{10} = 55$	$F_{11} = 89$	$F_{12} = 144$	$F_{13} = 233$	$F_{14} = 377$
$F_{15} = 610$	$F_{16} = 987$	$F_{17} = 1597$	$F_{18} = 2584$	$F_{19} = 4181$

2. La suite F_n est croissante. En effet, une récurrence immédiate montre que pour tout n, $F_n \geqslant 0$. Alors, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geqslant F_n$, ce qui montre la croissance.
On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant n-1$ (=l'énoncé correct). On le vérifie facilement pour F_0, F_1 et F_2 (vous comprendrez plus loin pourquoi j'initialise sur autant de termes). Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $F_n \geqslant n-1$. Puisque F_n est croissante, si $n \geqslant 2$, $F_{n-1} \geqslant F_1 \geqslant 1$. Ainsi supposons donc que $n \geqslant 2$ (ce qui signifie qu'on commence l'hérédité à $\mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)$, raison pour laquelle on a initialisé jusqu'à $\mathcal{P}(2)$). Alors :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geqslant (n-1) + 1 \geqslant n.$$

C'est bien ce qu'il fallait montrer pour que l'hérédité de la récurrence soit vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant n-1$.
Puisque la limite de $n-1$ est $+\infty$, on en déduit, par comparaison, que la limite de F_n est $+\infty$.

3. (a) On initialise pour $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1$ et $F_1F_2 = 1$. Soit donc $n \geqslant 0$, et supposons que l'égalité est vérifiée pour n. Montrons-la pour $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} F_n(F_{n-1}+F_{n+1}) = F_{2n} \\ F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \end{array} \right.$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée ainsi qu'on le vérifie facilement. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire une formule pour F_{2n+2} et une relation pour F_{2n+3}). La récurrence ne sera achevée que lorsqu'on aura établi LES DEUX égalités. Après avoir montré une seule des deux, on ne peut encore rien conclure ! Commençons par établir la relation pour F_{2n+2}.

$$\begin{aligned} F_{2n+2} &= F_{2n+1} + F_{2n} \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_n(F_{n-1}+F_{n+1}) \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) + F_n(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} + F_nF_{n+1} = F_{n+1}(F_{n+2}+F_n). \end{aligned}$$

Établissons maintenant la relation pour F_{2n+3}.

$$\begin{aligned} F_{2n+3} &= F_{2n+2} + F_{2n+1} \\ &= F_{n+1}(F_{n+2}+F_n) + F_{2n+1} \quad \text{(d'après l'égalité qu'on vient de démontrer)} \\ &= F_{n+1}(F_{n+2}+F_n) + F_n^2 + F_{n+1}^2 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= F_{n+1}^2 + (F_{n+2}-F_n)(F_{n+2}+F_n) + F_n^2 \\ &= F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2. \end{aligned}$$

Cela montre donc $\mathcal{P}(n+1)$, donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout n, d'après le principe de récurrence

Remarque. On peut aussi démontrer séparément chacune des deux égalités, en utilisant la relation de récurrence vérifiée par les termes pairs (et les termes impairs) : $F_{n+4} = 3F_{n+2} - F_n$ (relation facile à obtenir).

(c) Soit pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ la propriété :

$$\forall n \geqslant 0, \ \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} F_{n+k} = F_{n+2p}.$$

Pour $p=0$, on obtient, pour tout n, la relation $F_n = F_n$ trivialement vraie ! Regardons également ce que signifie la propriété pour $p=1$: cela donne, pour tout n, $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, qui est la relation de récurrence définissant F_n. Soit $p \geqslant 0$, et supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Il faut montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} F_{n+k} = F_{n+2p+2}$$

Soit donc $n \geqslant 0$ quelconque. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} F_{n+k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} F_{n+k} + F_{n+p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} F_{n+k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k-1} F_{n+k} + F_{n+p+1} \quad \text{(formule de Pascal)} \\
&= F_{n+2p} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k-1} F_{n+k} + F_{n+p+1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= F_{n+2p} + \sum_{k=0\ (-1)}^{p-1} \binom{p}{k} F_{n+1+k} + F_{n+p+1} \quad \text{(réindexation)} \\
&= F_{n+2p} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} F_{n+1+k} \\
&= F_{n+2p} + F_{n+1+2p} \quad \text{(hypothèse de récurrence, avec } n+1\text{)} \\
&= F_{n+2p+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
La relation obtenue pour $p = 2$ est :

$$\forall n \geqslant 0,\ F_n + 2F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+4}.$$

(d) Soit à montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$. Cette propriété est vraie pour $n = 1$ (vérification facile). Soit $n \geqslant 0$, et supposons que l'égalité est vérifiée au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} &= F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) - F_n(F_{n+1} + F_n) \\
&= F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \\
&= -(-1)^{n+1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (-1)^{n+2}.
\end{aligned}$$

4. Cette question est de loin la plus dure du devoir. J'y ai moi-même passé un certain temps...
Pour commencer, des essais pour des petites valeurs de n laissent penser que pour tout $n \geqslant 1$,

$$F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}.$$

Cette propriété est en effet vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$. Pour pouvoir la démontrer par récurrence, on a intérêt à trouver une relation de récurrence pour F_n portant uniquement sur les termes d'indice multiple de 3.

$$\begin{aligned}
F_{3n+6} &= F_{3n} + 3F_{3n+1} + 3F_{3n+2} + F_{3n+3} \quad \text{(question 3c)} \\
&= F_{3n} + 3F_{3n+1} + 3(F_{3n+3} - F_{3n+1}) + F_{3n+3} \\
&= 4F_{3n+3} + F_{3n}.
\end{aligned}$$

Utilisons cette relation pour montrer que si les égalités pour F_{3n} et pour F_{3n+3} sont vérifiées, alors celle pour F_{3n+6} également (récurrence d'ordre 2, initialisée sur deux termes).

$$\begin{aligned}
F_{3n+6} &= 4F_{3n+3} + F_{3n} \\
&= 4F_{n+2}^3 + 4F_{n+1}^3 - 4F_n^3 + F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 \\
&= 4F_{n+2}^3 + 5F_{n+1}^3 - 3F_n^3 - F_{n-1}^3 \\
&= (F_{n+3} - F_{n+1})^3 + F_{n+2}^3 + 2(F_n + F_{n+1})^3 + 5F_{n+1}^3 - 3F_n^3 - F_{n-1}^3 \\
&= F_{n+3}^3 + F_{n+2}^3 + 3F_{n+3}F_{n+1}^2 - 3F_{n+3}^2F_{n+1} - F_{n+1}^3 + 2F_n^3 + 2F_{n+1}^3 + 6F_nF_{n+1}^2 \\
&\qquad + 6F_n^2F_{n+1} + 2F_n^3 + 5F_{n+1}^3 - 3F_n^3 - F_{n-1}^3
\end{aligned}$$

Or, $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n$, d'où

$$\begin{aligned}
F_{3n+6} &= F_{n+3}^3 + F_{n+2}^3 + 3(2F_{n+1} + F_n)F_{n+1}^2 - 3(2F_{n+1} + F_n)^2F_{n+1} + 6F_{n+1}^3 + 6F_{n+1}^2F_n \\
&\qquad + 6F_{n+1}F_n^2 - F_n^3 - F_{n-1}^3 \\
&= F_{n+3}^3 + F_{n+2}^3 - 3F_{n+1}^2F_n + 3F_{n+1}F_n^2 - F_n^3 - F_{n-1}^3 \\
&= F_{n+3}^3 + F_{n+2}^3 - F_{n+1}^3 + (F_{n+1} - F_n)^3 - F_n^3 \\
&= F_{n+3}^3 + F_{n+2}^3 - F_{n+1}^3.
\end{aligned}$$

Voilà.
Je donne deux autres égalités, donnant F_{3n+1} et F_{3n+2} (j'ai mis plus de 4 heures à deviner ces relations)

$$F_{3n+1} = F_{n+1}(F_{n+1}^2 + F_n F_{n+2}) - F_n F_{n-1}^2$$
$$F_{3n+2} = F_{n+1}(F_{n+2}^2 + F_n^2) + F_n F_{n-1}^2.$$

On peut s'amuser à démontrer simultanément les trois relations (pour F_{3n}, F_{3n+1} et F_{3n+2}), à la manière de la question 3b. C'était une autre façon de répondre à la question : le plus dur consistait alors à deviner les deux relations pour F_{3n+1} et F_{3n+2}.

5. On fait une récurrence forte sur l'entier n. Pour $n = 0$, n est une somme vide de nombres de Fibonacci, forcément distincts et non consécutifs ! Si on préfère initialiser pour $n = 1$, $1 = F_1$. Soit $n > 0$, et supposons que pour tout $m < n$, m s'écrit comme une somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs. Montrons que c'est alors aussi le cas de n. Puisque la suite F_i tend vers $+\infty$, on aura $F_i \geqslant n$ pour i assez grand. Ainsi, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid F_i \leqslant n\}$ est un sous-ensemble borné (donc fini) de $\mathbb{N}$. Il est non vide, car $n \geqslant F_0 = 0$. Par conséquent, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, cet ensemble admet un élément maximal k. Le nombre F_k est alors le plus grand nombre de Fibonacci tel que $F_k \leqslant n$. Puisque $n \geqslant 1 = F_1$, $k \geqslant 1$, et donc $F_k \geqslant 1$. Alors, $n - F_k < n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $n - F_k$: ce nombre s'écrit de manière unique
$$n - F_k = F_{i_1} + \cdots + F_{i_s},$$
avec $i_1 < \cdots < i_s$ (nombres distincts) et même $i_{j+1} - i_j \geqslant 2$ (nombres de Fibonacci non consécutifs). Alors, on obtient une décomposition de n sous la forme :
$$n = F_{i_1} + \cdots + F_{i_s} + F_k.$$
Il reste à montrer que ces nombres de Fibonacci sont distincts et non consécutifs. Pour cela, vu que c'était déjà le cas pour $F_{i_1}, \ldots F_{i_s}$, il suffit de montrer que $i_s < k - 1$. Or, par maximalité de F_k, $F_{k+1} > n$, donc $n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Par conséquent, $F_{i_s} \leqslant n - F_k < F_{k-1}$. Puisque la suite de Fibonacci est croissante, cela implique que $i_s < k - 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc l'existence d'une décomposition
$$n = F_{i_1} + \cdots + F_{i_s} + F_k.$$
en somme de nombres de Fibonacci distincts non consécutifs.
Pour montrer l'unicité, nous démontrons le lemme suivant : toute somme de t nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs vérifie l'inégalité
$$F_{j_1} + \cdots + F_{j_t} < F_{j_t+1}.$$
Nous démontrons ceci par récurrence sur t. En effet, le résultat est vrai pour $t = 1$. Supposons-le vrai pour $t - 1$. Alors,
$$F_{j_1} + \cdots + F_{j_t} < F_{j_{t-1}+1} + F_{j_t}$$
(hypothèse de récurrence appliquée à $F_{j_1} + \cdots + F_{j_{t-1}}$. De plus, $j_{t-1} + 1 \leqslant j_t - 1$. Par conséquent,
$$F_{j_1} + \cdots + F_{j_t} < F_{j_t-1} + F_{j_t} = F_{j_t+1}.$$
Je reprends ma récurrence forte (pour montrer l'existence et l'unicité de la décomposition dans la base de Fibonacci). Supposons que nous ayons une décomposition
$$n = F_{j_1} + \cdots + F_{j_t}.$$
Alors, d'après le lemme précédent, $F_{j_t} \leqslant n < F_{j_t} + 1$. C'est la propriété définissant k. Ainsi, $j_t = k$. Alors, $F_{j_1} + \cdots + F_{j_{t-1}}$ est l'(unique, par hypothèse de récurrence) décomposition de $n - F_k$, c'est à dire $t - 1 = s$ et $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$ etc. Ainsi, une décomposition convenable de n est toujours égale à
$$n = F_{i_1} + \cdots + F_{i_s} + F_k.$$
Cela prouve l'unicité de cette décomposition.

6. Application : un jeu d'allumettes.
La stratégie gagnante consiste à systématiquement tirer le nombre d'allumettes égal au plus petit terme de la décomposition dans la base de Fibonacci du nombre restant d'allumettes. En effet
   - Le joueur 2 ne sera jamais en mesure de tirer la totalité des allumettes : si avant que le joueur 1 ne tire, le nombre d'allumettes n était un nombre de Fibonacci, alors il a tiré la totalité des allumettes et a gagné, sinon, soit F_i le terme minimal de la décomposition en base de Fibonacci de n. Ce terme n'est pas l'unique terme (sinon n est un nombre de Fibonacci). Il y en a un autre, qui par définition, est au moins aussi grand que $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i > 2F_i$. Ainsi, il reste au moins F_{i+2} allumettes, et comme le joueur 2 n'a pas le droit de retirer plus de $2F_i$ allumettes (le double du tirage du joueur 1), il ne peut pas retirer la totalité des allumettes.

- Si le joueur 1 joue de la sorte, il a toujours la possibilité de retirer F_i allumettes, F_i étant le terme minimal de la décomposition du nombre d'allumette restant n. Autement dit F_i est moins du double du nombre d'allumettes tirées par le joueur 2 au tout précédent. En effet, soit $F_{i_1} + \cdots + F_{i_s}$ le nombre d'allumettes avant que le premier joueur ne tire au coup d'avant. Alors, le nombre d'allumettes avant que le joueur 2 ne joue est $n = F_{i_2} + \cdots + F_{i_s}$, et d'après le point précédent, le joueur 2 tire un nombre d'allumettes m strictement inférieur à F_{i_2}. Il restera $n - m$ allumettes. Soit

$$F_{i_2} - m = F_{j_1} + \cdots + F_{j_t}$$

la décomposition de $F_{i_2} - m$ dans la base de Fibonacci (toujours écrit de manière croissante), et de même

$$m = F_{\ell_1} + \cdots + F_{\ell_r}$$

la décomposition de Fibonacci de m. Ces deux décompositions sont toutes deux constituées d'au moins un terme. Si $F_{j_1} > 2m$, alors $F_{j_1} > 2F_{\ell_r} > F_{\ell_r} + F_{\ell_r - 1} = F_{\ell_r + 1}$. Par conséquent,

$$F_{\ell_1} + \cdots + F_{\ell_r} + F_{j_1} + \cdots + F_{j_t}$$

est une somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs. Par conséquent, c'est une décomposition en base de Fibonacci, constituée d'au moins deux termes, de $F_{i_2} - m + m = F_{i_2}$. Cela contredit l'unicité de la décomposition, puisque l'unique décomposition de F_{i_2} est F_{i_2} lui-même. Par conséquent, $F_{j_1} \leqslant 2m$. Par ailleurs, la décomposition en base de Fibonacci du nombre d'allumettes restant est

$$n - m = F_{i_2} - m + F_{i_3} + \cdots + F_{i_s} = F_{j_1} + \cdots + F_{j_t} + F_{i_3} + \cdots + F_{i_s}.$$

La stratégie du joueur 1 consiste donc à tire F_{j_1} allumettes, ce qu'il peut faire, puisque $F_{j_1} \leqslant 2m$, c'est-à-dire puisque ce nombre est inférieur ou égal au double d'allumettes tirées par le joueur 2.
- Comme on tire à chaque fois au moins une allumette et qu'il y a au départ un nombre fini d'allumettes, le jeu se termine. Comme le joueur 2 ne peut pas gagner, d'après le raisonnement précédent, c'est le joueur 1 qui gagne.

Si le nombre initial d'allumettes est un nombre de Fibonacci, le joueur 1 ne pouvant pas tirer toutes les allumettes, est obligé d'en tirer strictement moins. Il se retrouve donc dans la situation du joueur 2 précédemment, qui se voyait obligé de tirer moins d'allumettes que le plus petit terme dans la décomposition de Fibonacci du nombre d'allumettes restantes. Les rôles sont donc inversés, et c'est maintenant le joueur 2 qui a une stratégie gagnante.

Correction de l'exercice 8 –
D'après les règles de composition des limites, il suffit de montrer que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Soit donc $A > 0$. Considérons $f^{-1}([\![0, E(A)]\!])$. Comme f est bijective, cet ensemble a le même cardinal que $[\![0, E(A)]\!]$. C'est donc un ensemble fini. Il admet par conséquent un plus grand élément n_0. Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1,\ n \notin f^{-1}([\![0, E(A)]\!]), \qquad \text{donc:} \qquad f(n) \notin [\![0, E(A)]\!], \qquad \text{donc:} \qquad f(n) \geqslant E(A) + 1 > A.$$

On en déduit que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
D'où le résultat par le théorème de composition des limites.

Correction de l'exercice 9 –

1. Tous les termes des deux produits définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot u_n \geqslant u_n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. (a) Soit $t \in]-1, +\infty[$. Alors $0 < t + 1 < t + 2$, donc $\frac{1}{t+1} > \frac{1}{t+2}$:

$$1 - \frac{1}{t+1} < 1 - \frac{1}{t+2} \qquad \text{soit:} \qquad \frac{t}{t+1} < \frac{t+1}{t+2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} > \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{2},$$

d'après la question précédente appliquée à chacun des termes du second produit sauf celui correspondant à l'indice $k=0$, et en utilisant la positivité de tous les termes du produit. Ainsi :

$$u_n^2 > \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}2k} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{n}(2k-2)}{\prod_{k=2}^{n}(2k-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}2k} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1}2k}{\prod_{k=2}^{n}(2k-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4n}.$$

Par conséquent, $u_n^2 > \dfrac{1}{4n}$, et donc $u_n > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
Remarquons maintenant que :

$$u_n v_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}2k} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=2}^{n+1}2k-1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Par conséquent, $u_n \cdot v_n = \dfrac{1}{2n+1}$. Or, d'après la question précédente :

$$0 < u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = v_n.$$

Par conséquent, $u_n^2 < u_n v_n = \dfrac{1}{2n+1}$, d'où, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, $0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
De même, $v_n^2 > u_n v_n = \dfrac{1}{2n+1}$, d'où $v_n > \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
Enfin :

$$v_n = \frac{1}{(2n+1)u_n} \leqslant \frac{1}{(2n+1)\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$

On obtient donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_{n+1} étant strictement positive :

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+3} > \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

l'inégalité provenant de la question (2a). Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n > w_{n+1}$, et par conséquent, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{4k^2}.$$

Ainsi, $w_1 = \frac{3}{4}$. Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant \frac{3}{4}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$ et $0 < v_n \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}$, donc :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} > \frac{1}{2\sqrt{n}\frac{2\sqrt{n}}{2n+1}} = \frac{2n+1}{4n} \geqslant \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \leqslant w_n \leqslant \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée, elle admet une limite finie λ, et d'après le théorème de prolongement des inégalités (passage à la limite dans une inégalité), λ vérifie : $\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{4}$.

(b) Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite λ finie non nulle, on a $w_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda$, donc $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \lambda$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$.

4. De l'équivalent précédent, on déduit : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \lambda u_n v_n = \dfrac{\lambda}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{2n}$.

   Par conséquent, comme on peut élever un équivalent à une puissance fixe(ici, $\frac{1}{2}$), $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\lambda}{2n}}$.

   Alors, $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{\lambda} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{2\lambda n}}$

Correction de l'exercice 10 –

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Prenons $n=1$, nous obtenons : $\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n}=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\sqrt{1}=1$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n+1} &= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}+\sqrt{n+1}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\\
&\geqslant \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n}-\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\\
&\geqslant \frac{2n}{3}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{n}\\
&\geqslant \frac{2n}{3}\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{n}\\
&\geqslant \frac{-2n}{3\cdot 2\sqrt{n}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{n}=0,
\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n} \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Prenons $n=1$, nous obtenons : $\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}=\dfrac{7}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\sqrt{1}=1$. Ainsi, $\mathcal{Q}(1)$ est vérifiée.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vérifié. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} &= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}+\sqrt{n+1}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}\\
&\leqslant \left(\frac{2(n)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}\\
&\leqslant \left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{6}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1}\\
&\leqslant \frac{2(n+1)}{3}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{n}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n+1}\\
&\leqslant -\frac{2(n+1)}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{6}\sqrt{n}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n+1}\\
&\leqslant -\frac{2(n+1)}{3\cdot 2\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{1}{6}\sqrt{n}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n+1}\\
&\leqslant -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{n+1}-\frac{1}{6}\sqrt{n}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n+1}\\
&\leqslant \frac{1}{6}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\leqslant 0,
\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{Q}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3n}\right) \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3}.$$

Correction de l'exercice 12 –

1. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

   (a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$; $\qquad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :

   $$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

   En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

   (c) On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{H}(p)$: « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ »
   Initialisation : Pour $p = 0$, $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée ssi $I_0 = \frac{\pi}{2}$, ce qui provient de la question 1.
   Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(p-1)$ soit vérifié. Alors, d'après la question 2,

   $$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2p(2p-1)}{4p^2} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

   La propriété est donc héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   L'expression pour I_{2p+1} se démontre bien sûr de la même manière. Je propose une démonstration alternative (qui, pour être complètement rigoureuse, nécessiterait aussi une récurrence). Il s'agit bien sûr d'une autre façon de mettre en forme la même idée. D'après la question 2,

   $$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1 \\ & \frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n+1} x$. Ainsi,

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_n \leqslant I_{n+1}.$$

   Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in NN^*$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

   $$1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}.$$

(e) On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$

Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.
Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \cdot \frac{2p^2}{2p} \cdot \pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

(a) On obtient, à l'aide de l'indication :

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \ln \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln \frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(b) Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_{n+1} - S_n| \leqslant \frac{A}{n^2}$. Or, $\sum \frac{A}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum S_{n+1} - S_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, la somme partielle de cette série est $\sum_{k=1}^{n} S_{k+1} - S_k = S_{n+1} - S_1$. Ainsi, la convergence de la série est équvalente à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un réel fini S.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \mathrm{e}^S$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \frac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$.
De plus : $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.
D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $S = \ln\sqrt{2\pi}$.

(d) La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{soit : } \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)), \quad \text{soit : } n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1)).$$