Analyse 2 – Séries numériques : Révisions

Correction de l'exercice 1 – Voilà quelques **indications** sur la démarche à suivre. **Je ne donne pas tous les détails de la rédaction**, notamment lorsqu'on fait appel à des règles telles que la règle de d'Alembert ou la règle de Riemann.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln n}{n^5}$.
   Tout d'abord, d'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.
   Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^3} = 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum u_n$ converge absolument (mais ici, cela n'apporte rien, puisque $\sum u_n$ est à termes positifs).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{5+n}}$.
   Tout d'abord, par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.
   De plus l'exponentielle va induire une convergence rapide de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, qui ne sera pas compensée par un facteur polynomial. On songe donc à la méthode de Riemann. D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme précédemment, $\sum u_n$ converge donc.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^4 \ln(3n)}{\mathrm{e}^{2n}}$.
   La encore, on a une exponentielle qui va l'emporter sur le reste, même si on rajoute un facteur n^2. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, et donc $\sum u_n$ converge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}} = 1$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}} - 1 = \dfrac{2\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n}$.
   De plus, $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente (série de Riemann de paramètre 1), donc, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, $\sum u_n$ diverge.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^3}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$. Donc $\mathrm{e}^{-n} = o(n)$, puis $n + \mathrm{e}^{-n} \underset{+\infty}{\sim} n$.
   Comme de plus $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$, on obtient : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, $\sum u_n$ converge.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.
   Or, $n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\cdot\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$. L'exponentielle étant continue, $\lim u_n = \mathrm{e}$. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2\sqrt{n}}$
   Puisque la fonction cos est bornée, $(-1)^n \cos n = O(1)$, donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ est une série à termes positifs convergente (Riemann de paramètre $\frac{5}{2} > 1$), $\sum u_n$ converge absolument, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n^2-1} - n = \dfrac{n^2-1+n^2}{\sqrt{n^2-1}+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1}+1}$.
   Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n}$. Comme $\sum \frac{-1}{n}$ est une série à termes de signe constant (négatif ici) et qu'elle diverge (série de Riemann de paramètre 1), $\sum u_n$ diverge.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{n^{\frac{3}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

   On a : $n^{\frac{3}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n} = -\sqrt{n}$. Donc, par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

   Même s'il ne s'agit pas d'un équivalent (on ne peut pas appliquer l'exponentielle à un équivalent), on peut se dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se comporte un peu comme $(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $+\infty$, c'est à dire converge très vite vers 0, plus vite que n'importe quelle puissance de n. Cela suggère l'utilisation de la règle $n^\alpha u_n$.

   Pour tout $n \in n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \mathrm{e}^{n^{\frac{3}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+2\ln n}$.

   Or, $2\ln n = o(\sqrt{n})$, donc : $n^{\frac{3}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\ln n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt{n}$.

   Il en résulte, par composition des limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2+\sin(n^6)}$. Or, $\sin(n^6) = O(1) = o(n^2)$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et $\sum u_n$ converge.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-2n}+n}{n^3+1}$. On a : $\mathrm{e}^{-2n} = o(n)$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum u_n$ converge.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\mathrm{e}^{(2+\frac{3}{n})\ln n}}$.

    Observation : $(2+\frac{3}{n})\ln n \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$, donc, à peu de choses près (je me garde bien de dire qu'il s'agit d'un équivalent), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se comporte comme $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme il s'agit de comparer $\sum u_n$ à une série de Riemann, essayons la règle $n^\alpha u_n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \mathrm{e}^{-\frac{3\ln n}{n}}$. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$, donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (c'est même un équivalent). Ainsi, $\sum u_n$ converge (absolument).

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n\mathrm{e}^{-n}$.

    Alors pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, $|n^2 u_n| = n^3\mathrm{e}^{-n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |n^2 u_n| = 0$: $\sum u_n$ converge absolument.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin n$.

    On peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. En effet, raisonnons par l'absurde. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, considérons l'égalité suivante, provenant des formules trigonométriques :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1), \qquad \text{soit :} \qquad \cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}.$$

    Passons à la limite dans cette expression. On en déduit l'existence de la limite de $(cosn)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant :

    $$\ell' = \lim_{n\to+\infty} \cos n = \ell\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}.$$

    De même, en passant à la limite dans : $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n+1) = cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$, on obtient :

    $$\ell = -\ell'\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$$

    En combinant les deux équations obtenues, on obtient :

    $$\ell = -\ell\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\cdot\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}, \qquad \text{soit :} \qquad \ell\left(1+\left(\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2\right) = 0.$$

    Ainsi, $\ell = 0$, puis $\ell' = 0$. On aboutit à une contradiction lorsqu'on passe à la limite dans $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, qui donne alors $0 = 1$. Donc $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, et $\sum \sin n$ diverge grossièrement.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^{-n^\alpha} = \mathrm{e}^{-n^\alpha\ln a}, a > 0$. On distingue plusieurs cas :
    - Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^\alpha\ln a = 0$, donc $\lim u_n = 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
    - Si $\alpha = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{a}$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
    - Si $\alpha > 0$, on distingue suivant la valeur de a :
      - $*$ Si $a = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
      - $*$ Si $a < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n^\alpha < 0$, donc $a^{-n^\alpha} > 1$. Ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement.

* Si $a > 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \mathrm{e}^{2\ln n - n^\alpha \ln a}$. Or, $lnn = o(n^\alpha)$, donc $2\ln n - n^\alpha \ln a \underset{+\infty}{\sim} -n^\alpha \ln a$. Comme $\ln a > 0$, cette dernière expression tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, et $\sum u_n$ converge absolument.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n^{\ln n}(\ln n)^n}$.
Puisque $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\ln n \geqslant 2$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$. Le TCSTP et la convergence de la série de Riemannd de paramètre 2 permettent de conclure que $\sum u_n$ est convergente.

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^n}{n!\ a^n}$, $|a| \neq \mathrm{e}$.
On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{|a|(n+1)} = \dfrac{1}{|a|}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{\mathrm{e}}{|a|}$. En utilisant la méthode de d'Alembert, $\sum u_n$ converge absolument si $|a| > \mathrm{e}$, et diverge grossièrement si $|a| < \mathrm{e}$. L'étude en $|a| = \mathrm{e}$ nécessiterait la formule de Stirling (hors-programme), donnant un équivalent de $n!$.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\ln n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, donc $\sum u_n$ converge.

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
On utilise la formule suivante (DL du ln) : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Alors : $\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\left(1 - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right)$. Un argument d'équivalents maintenant classique montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1 = 0$; on peut donc utiliser l'équivalent de $\mathrm{e}^{v_n} - 1$ lorsque (v_n) tend vers 0 :
$$\mathrm{e}\left(1 - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\mathrm{e}\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1\right).$$
Or : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1 = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$.
Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{n}$. La série $\sum \frac{\mathrm{e}}{n}$ étant à termes positifs et divergente, $\sum u_n$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents.

20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(\cos\dfrac{1}{n})$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{1}{n} = 1$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \cos\dfrac{1}{n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$. Or, $\sum -\frac{1}{2n^2}$ est convergente et à termes de signe constant, donc $\sum u_n$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents.

21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\ln n$.
Alors, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $\sum u_n$ converge (absolument)

Correction de l'exercice 2 –

1. On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (n+1)\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$
Or, les séries $\sum \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum \frac{1}{n!}$ convergent en tant que séries exponentielles. Ainsi, $\sum u_n$ converge aussi, et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 2\mathrm{e}.$$

2. On procède de même, en essayant d'écrire le polynôme $n^3 + 2n^2 - 3n - 1$ comme combinaison linéaire des facteurs $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$, n et 1, qui ont le bon goût de bien de simplifier avec les factorielles. Pour ce faire, on travaille par compensations successives, en partant du plus haut degré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$n^3+2n^2-3n-1 = n(n-1)(n-2)+3n^2-2n+2n^2-3n-1 = n(n-1)(n-2)+5n^2-5n-1 = n(n-1)(n-2)+5n(n-1)-1.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n(n-1)(n-2)}{n!} + 5\frac{2^n n(n-1)}{n!} - \frac{2^n}{n!}$$

Or, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n(n-1)(n-2)}{n!} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2^n n(n-1)(n-2)}{n!} = 8 \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-3}}{(n-3)!}$.

Cette série est convergente (série exponentielle), de somme $8\mathrm{e}^2$.

De même, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 5\frac{2^n n(n-1)}{n!}$ est convergente, de somme $20e^2$

Et de même, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 5\frac{2^n}{n!}$ est convergente, de somme e^2.

Par conséquent, les trois séries étant convergentes, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 8\mathrm{e}^2 + 20\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 = 27\mathrm{e}^2.$$

3. Pour ce type de calculs, on utilise la formule du binôme négatif, qui nous autorise à dériver termes à termes la série géométrique. Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

En dérivant termes à termes, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^n} = 4.$$

En dérivant encore, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 16.$$

Écrivons donc le polynôme n^2+2n-1 comme combinaison linéaire des polynômes $(n+1)(n+2)$, $n+1$ et 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2+2n-1 = (n+1)(n+2) - 3n - 2 + 2n - 1 = (n+1)(n+2) - (n+1) - 2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} - \frac{2}{2^n}.$$

D'après la formule du binôme négatif, puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a exprimé u_n comme une somme de trois termes généraux de séries convergentes, donc $\sum u_n$ converge. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 16 - 4 - 4 = 8.$$

4. Pour cette série, on peut penser à une double-primitivation de la série géométrique. Mais cela n'est pas simple, car aucun théorème du cours ne nous permet de primitiver une série. On pourrait songer à d'abord le faire sur les sommes partielles, puis passer à la limite, mais les primitivations des sommes partielles ne sont pas évidentes.

Remarquons tout de même qu'on sait primitiver une fois la série géométrique : cela nous donne la série du logarithme. Forts de cette remarque, nous pouvons maintenant penser à nous ramener à une primitivation simple (donc l'utilisation de la série du logarithme), en décomposant la fraction rationnelle, comme on a l'habitude de le faire pour l'intégration. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, puisque les deux séries du terme de droite ci-dessous convergent (séries du logarithme pour $|x| < 1$), la série initiale converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= -\ln\left(1-\frac{1}{3}\right) - 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= -\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\
&= -\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 3\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1,
\end{aligned}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{4^n}{(2n)!} \leqslant \frac{4^n}{n!}$, donc $\sum \frac{4^n}{(2n)!}$ converge, par comparaison avec une série exponentielle. Notons S sa somme.
   De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant 2 \cdot \frac{4^n}{n!}$, donc $\sum \frac{4^n}{(2n)!}$ converge, par comparaison avec une série exponentielle. Notons T sa somme.
   On a :
   $$S + T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \mathrm{e}^2 \qquad \text{et} \qquad S - T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-2}.$$
   Ainsi,
   $$S = \frac{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}.$$
   Par analogie avec les formules d'Euler, on dit que S et T sont le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique du réel 2, notés $\mathrm{ch}(2)$ et $\mathrm{sh}(2)$.
6. D'après les règles sur le ln, c'est une série téléscopique :
   $$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \ln \frac{\cos(\mathrm{e}^{-(n+1)})}{\cos(e^{-n})} = \ln\cos(\mathrm{e}^{-(N+1)}) - \ln(\cos \mathrm{e}^0),$$
   d'où, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence de la série, et la valeur de sa somme :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{\cos(\mathrm{e}^{-(n+1)})}{\cos(e^{-n})} = -\ln(\cos 1).$$

Correction de l'exercice 5 –

1. Tout l'exercice se résout facilement si on fait l'observation suivante :
   $$\forall k > 1, u_k^p = \frac{1}{k} + u_{k-1}^p,$$
   donc, en sommant ces relations de 2 à n, pour tout $n > 1$,
   $$\sum_{k=2}^{n} u_k^p = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} u_k^p \qquad \text{soit:} \qquad u_k^p = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + u_1^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$
   d'après la valeur de u_1. Ainsi, la suite $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est autre que la suite des sommes partielles de la série de Riemann de paramètre 1.
   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$.
   On a $u_1 = 1$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors,
   $$\frac{1}{n+1} + u_n^p \geqslant 0,$$
   donc u_{n+1} est bien défini, et
   $$u_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} + u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vrai.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, u_n étant positif pour tout n, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant à termes positifs, sa somme partielle est croissante. La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
De plus, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$, par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2. On a déjà montré dans l'exercice 4 que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. Remontrons-le d'une manière différente, en utilisant une comparaison entre séries et intégrales.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{donc:} \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

On en déduit, en utilisant la première inégalité au rang $k-1$ et la deuxième au rang k, que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Soit maintenant $n \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Par conséquent,

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n,$$

et donc

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1-\ln 2}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Or, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n},$$

donc la limite de cette expression est 1. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1-\ln 2}{\ln n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} + 1,$$

ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} (\ln n)^{\frac{1}{p}}$.

3. On déduit de ce qui précède que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{2}{p}}}$, et ces deux séries sont à termes positifs (à partir du rang 2), donc de même nature.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{2}{p}}}$ est continue et décroissante. D'après le théorème de comparaison entre une série et une intégrale, on en déduit que la nature de la série $\sum v_n$ est la même que la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{2}{p}}}$. Or, pour tout $A \geqslant 2$, si $p \neq 2$,

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{2}{p}}} = \left[\frac{1}{1-\frac{2}{p}}(\ln x)^{1-\frac{2}{p}}\right]_2^A = \frac{p}{p-2}(\ln(A)^{1-\frac{2}{p}} - \ln(2)^{1-\frac{2}{p}}).$$

Ainsi :

- Si $p > 2$, cette intégrale diverge, donc $\sum v_n$ diverge.
- Si $p < 2$, cette intégrale converge, donc $\sum v_n$ converge.
- Si $p = 2$, on a
$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{2}{p}}} = \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)} = \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^A = \ln(ln(A)) - \ln(ln(2)),$$
qui tend vers $+\infty$ lorsque A tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale diverge, donc aussi $\sum v_n$.

4.
```
program series_ex10;

var u,p : real;
   i : integer;

begin
   write('Entrez une valeur positive de p:');
   readln(p);
   u:= 1;
   writeln('u_0=1');
   for i:=2 to 50 do
   begin
      u:= exp(1/p*ln(exp(p * ln(u))+1/i));
      writeln('u_',i,'=',u);
   end;
end.
```

Correction de l'exercice 7 – Indications de méthodes (à développer, notamment lorsqu'il faut utiliser un argument de séries alternées)

1. Pas de DV grossière, pas de CV absolue. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}-1}.$$
Donc $(|u_n|)$ est décroissante de limite nulle. Ainsi, (u_n) est une série alternée, donc convergente. On a donc semi-convergence.
2. Pas de DV absolue (CC). En revanche, on a CV absolue, à cause de l'exponentielle de $-n$, qui va tout écraser à 0, y coimpris l'exponentielle de la racine. Formalisons cela en utilisant le critère $n^\alpha u_n$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2|u_n| = \mathrm{e}^{\sqrt{6n+5}-n+2\ln n} \to 0,$$
d'après les CC. Donc $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la CVA, par comparaison à une série de Riemann.
3. $\ln(\ln n) = o(\ln n)$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
Cette dernière série est à termes positifs, donc on peut utiliser le critère de comparaison des STP par équivalence : $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Or
$$\forall n \geqslant 3 \geqslant \mathrm{e}, \quad \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$
donc $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ DV, d'après le TCSTP, par comparaison à une série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$.

4. Ne tombez pas dans le piège : la série diverge grossièrement !
5. Effectuons un DL : lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}-1\right) = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (série alternée), et une série donc le tg est en $O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ CVA (critère de comparaison par O, ou par o en constatant qu'alors, le tg est en $o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$).

Le O vous permet d'arrêter le DL à l'ordre 1. Dire que le reste est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ signifie que le terme suivant dans le DL est d'ordre au moins égal à 2 (éventuellement égal à 2). Si on se contente du DL habituel, avec $o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce n'est pas suffisant. On peut éviter le recours aux O, mais il faut dans ce cas prendre le DL à l'ordre 2, pour récupérer les termes d'ordre 2.
6. De même que juste au-dessus, et avec les mêmes remarques concernant les O :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

Or, une étude de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ montre que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang, donc $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est une série alternée, donc convergente. De plus, $\ln n = o(\sqrt{n})$, donc $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, et donc, le terme en $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ est aussi en $o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, et est donc le tg d'une série convergente. Donc $\sum u_n$ converge.
7. Encore un DL :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\sum u_n$ CV en tant que somme d'une série alternée, donc convergente, et d'une série qui CV absolument, par comparaison avec une série de Riemann de paramètre 2.
8. Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t \geqslant 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \in [0,1],\quad \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+t)^n} \qquad \text{puis:} \qquad |u_{n+1}| \leqslant |u_n|.$$

De plus,

$$\forall n \geqslant 2,\quad |u_n| = \left[\frac{1}{(1-n)(1+t)^{n-1}}\right]_0^1 = \frac{1}{1-n}(2^{1-n}-1) \to 0.$$

Donc $\sum u_n$ est alternée, donc converge.

Remarquez que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc on n'a pas CVA.
9. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (série alternée). La série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ peut se comparer à une intégrale : elle est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (car cette fonction est décroissante, reprendre l'argument du cours), c'est-à-dire que $\sum \frac{1}{n\ln n}$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ admet une limite finie en $+\infty$. Or,

$$\forall x \geqslant 2,\quad \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^x = \ln\ln x - \ln\ln 2.$$

Cette expression tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

Ainsi, $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente : elle est donc divergente.
10. $u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} -1$, donc la série est grossièrement DV.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \ \mathrm{d}x = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(x+\pi)}} \sin x \ \mathrm{d}x,$$

par un cdv linéaire. Les fonctions intégrées étant de même signe constant, le signe alterne. De plus,

$$|u_{n+1}| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(x+\pi)}} |\sin x| \ \mathrm{d}x \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(x)}} |\sin x| \ \mathrm{d}x = |u_n|,$$

par croissance de l'intégrale, et par décroissance de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(x)}} \ \mathrm{d}x \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n\pi)}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n\pi)}},$$

du fait toujours de la décroissance de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

Donc $\sum u_n$ est une série alternée, donc convergente.

Correction de l'exercice 8 –

1. $\ln^6 n = o(\sqrt{n})$, donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln^6 n}\right)$. La série diverge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme π est irrationnel, $\sin n \neq 1$ et $\sin n \neq -1$. Donc $n - 1 < n + \sin n < n + 1$. Ainsi, $E(n + \sin n) \in \{n-1, n\}$. On a de même $E(n+1+\sin(n+1)) \in \{n, n+1\}$. Ainsi, $E(n+1+\sin(n+1)) \geqslant E(n + \sin n)$.

   Par conséquent, $\left(\frac{1}{E(n+\sin n)}\right)$ est décroissante, de limite nulle, donc la série considérée est une série altérnée, dont on montre la convergence en prouvant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
3. $n - n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o((\frac{1}{n})^4)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   D'où le tg est équivalent au tg d'une série de Riemann convergente, puis signe constant au voisinage de $+\infty$, d'où la convergence.

Correction de l'exercice 13 – (Écricome 2007)

1. Les développements usuels à l'ordre n utilisés ici sont, au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{y^k}{k} + o(x^n).$$

Ici, il vient donc

$$2 - \mathrm{e}^x = 2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

D'où, par composition, le terme $-x - \frac{x^2}{2}$ étant bien de limite nulle :

$$\ln(2 - \mathrm{e}^x) = \ln\left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Alors $\dfrac{1}{k} > 0$, donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} > 1$, puis

$$2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} < 1.$$

De plus, $k \geqslant 2$, donc $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2}$, donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$, par croissance de l'exponentielle. Or,

$$\mathrm{e} < 4 \qquad \text{donc:} \qquad \sqrt{\mathrm{e}} < 2 \qquad \text{donc:} \qquad 2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} > 0.$$

On a bien obtenu : $2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[$.

(b) Par conséquent,

$$\forall k \geqslant 2, \quad \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) < 0.$$

(c) Lorsque k tend vers $+\infty$, $\frac{1}{k}$ tend vers 0, et on peut donc utiliser le développement limité de la question 1, qui fournit l'équivalent suivant :

$$\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{k}.$$

Les séries $\sum \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ et $\sum -\frac{1}{k}$ étant toutes deux à termes toujours négatifs (donc de signe constant), l'équivalent ci-dessus permet d'affirmer qu'elles sont de même nature. Or $\sum -\frac{1}{k}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre 1. Donc la série de terme général $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ est divergente.

(d) La suite (V_n) est la somme partielle de la série de la question précédente. Les termes étant tous négatifs, (V_n) est décroissante, et elle ne converge par vers une limite finie, puisque la série est divergente. Donc elle diverge vers $-\infty$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty, \qquad \text{puis:} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

3. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] &= \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k-1}{k} \\
&= V_n - \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) \\
&= \ln u_n - \ln 1 + \ln n = \ln(n u_n),
\end{aligned}$$

la dernière somme état une somme télescopique.

(b) On utilise le DL trouvé dans la question 1, valide ici puisque $\frac{1}{k}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ainsi, on obtient l'équivalent suivant : $\ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k^2}$.

(c) Par conséquent, le membre de droite de cet équivalent étant de signe constant (négatif), il en est de même du membre de gauche, au moins à partir d'un certain rang, et les deux séries dont les termes généraux sont donnés par ces deux expressions équivalentes sont donc de même nature. Or, $\sum_{k\geqslant 2} -\frac{1}{2k^2}$ converge, en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc $\sum_{k\geqslant 2} \ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ converge également.

Soit S la somme de cette série. On a donc, d'après la question 3(a),

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(nu_n) = S \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{n\to+\infty} nu_n = \mathrm{e}^S, \qquad \text{donc:} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^S}{n},$$

Il suffit donc de poser $K = \mathrm{e}^S > 0$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{K}{n}$ étant à termes positifs, elles ont même nature, du fait de l'équivalent ci-dessus. Or, $\sum \frac{K}{n}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $1 \leqslant 1$, donc $\sum u_n$ diverge.

4. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$.

(a) La suite $(V_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles d'une série à terme général négatif, donc $(V_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. Par croissance de la fonction exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est aussi décroissante.

(b) On a donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ décroissante positive, et de limite nulle. Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0,$
  puisque $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0,$
  puisque $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1},$
  donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$, puisque (u_n) est de limite nulle.

Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

(c) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant adjacentes, elles admettent une même limite finie ℓ. Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$:

- $\exists N_1 > 0, \quad \forall n \geqslant N_1, \quad |S_{2n} - \ell| < \varepsilon$
- $\exists N_2 > 0, \quad \forall n \geqslant N_2, \quad |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2\max(N_1, N_2)$, $|S_n - \ell| < \varepsilon$.

On en déduit que $(S_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite finie, donc que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

(d) Soit $n \geqslant 2$.

- Supposons que n est pair, et posons, $n = 2m$. Puisque (S_{2n}) est décroissante de limite $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k$, et que (S_{2n+1}) est croissante de même limite, on a :

$$S_{2m+1} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2m}.$$

Ainsi, en soustrayant S_{2m}, on obtient :

$$(-1)^{2m+1} u_{2m+1} \leqslant S_{2m+1} - S_{2m} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_{2m} \leqslant 0.$$

Or, $(-1)^{2m+1} u_{2m+1} = -u_{2m+1} \geqslant -u_{2m}$, car (u_n) est décroissante. Ainsi

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_n \right| \leqslant u_n.$$

- De la même façon, si n est impair, on peut écrire $n = 2m+1$, et on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_{2m+1} \leqslant S_{2m} - S_{2m+1} = -(-1)^{2m+1} u_{2m+1} = u_{2m+1},$$

d'où :

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k u_k - S_n \right| \leqslant u_n.$$

Cette majoration est donc valable pour tout n. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, u_n est un majorant de l'erreur faite en approchant la somme de la série par sa somme partielle S_n. On obtient donc la fonction suivante, dans laquelle on calcule conjointement la suite (V_n) et la somme partielle (S_n).

```
function somme(e:real):real;

var u,v,S:real;
    k:integer;

begin
  if e<=0 then                {test de cohérence: e doit être positif}
    begin
      writeln('erreur');
      halt;
    end;
  v:=0;                       {initialisation de la suite V}
  S:=0;                       {initialisation de la somme partielle}
  k:=1;                       {initialisation de l'indice k}
  repeat
    k:=k+1;                   {on incrémente k: le premier indice
                               considéré sera bien k=2}
    v:= v + \ln(2-exp(1/k)); {calcul du terme suivant de la suite (V_k)}
    u:=exp(v);                {calcul de u_k}
    if (k mod 2) = 0            {calcul de la somme partielle, en distinguant
                               suivant la parité, pour avoir le bon signe}
      then S:=S+u
      else S:=S-u;
  until
    u<e;                      {condition d'arrêt d'après ce qui précède}
  somme:=S;
end;
```

Correction de l'exercice 15 – (Oral HEC 2010)

1. Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente si la suite de ses sommes partielles, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, est une suite convergente.
   Si la série est à terme positifs, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. Par conséquent, la série converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.
   C'est faux pour une série à termes quelconques, comme le montre l'exemple $\sum (-1)^n$, série grossièrement divergente, dont les sommes partielles ne prennent que 2 valeurs 0 et 1, en oscillant entre les 2.
2. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors aussi $\sum (u_n + v_n)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\min(u_n, v_n) \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n.$$

   Ainsi, les séries étant à termes positifs, le théorème de comparaison des séries à termes positifs amène la convergence de $\sum m_n$ et de $\sum M_n$.

Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\min(x,y) + \max(x,y) = x + y.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} m_n + \sum_{k=1}^{n} M_n = \sum_{k=1}^{n} (m_n + M_n) = \sum_{k=1}^{n} u_n + v_n = \sum_{k=1}^{n} u_n + \sum_{k=1}^{n} v_n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette expression, toutes les séries étant convergentes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m_n + \sum_{k=1}^{+\infty} M_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n + \sum_{k=1}^{+\infty} v_n.$$

3. On suppose désormais que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} u_n &= \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \\ \\ v_n &= \frac{4}{5^n} \end{cases}$

   (a) Attention au facteur 2 qui manquait dans l'expression de u_n.

   - La série $\sum u_n$ est à termes positifs, et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$, donc, d'après le théorème de comparaison par équivalents, les séries étant à termes positifs, $\sum u_n$ est de même nature de $\sum \frac{2}{n^2}$, donc convergente (série de Riemann de paramètre 2) Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

     $$\sum_{k=1}^{n} u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} \right) = 1 - \frac{2}{n+2}.$$

     En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

     $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

   - La série $\sum v_n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{5} \in]-1,1[$, donc elle est convergente. De plus :

     $$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 1.$$

   Ainsi, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes de même somme égale à 1.

   (b) Soit, pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $v_n \leqslant u_n$.
   On a $u_2 = \frac{2}{12} = \frac{4}{24}$ et $v_2 = \frac{4}{25}$, donc $u_2 \geqslant v_2$, d'où $\mathcal{P}(2)$.
   Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors

   $$u_{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3} \cdot u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{5}.$$

   Or, la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+3}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (étude rapide à faire), et $f(2) = \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$, donc pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{n+1}{n+3} > \dfrac{1}{5}$. On en déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, et par positivité des suites (u_n) et (v_n) que :

   $$u_{n+1} > \frac{u_n}{5} \geqslant \frac{v_n}{5} = v_{n+1}.$$

   D'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $[X_n = u_n]$ et $[X_n = v_n]$ soient des parties complémentaires de Ω, de même probabilité $\frac{1}{2}$.

(a) Soit $\omega \in \Omega$. Puisque les événements $[X_n = u_n]$ et $[X_n = v_n]$ sont compémentaires, on a soit $\omega \in [X_n = u_n]$, soit $\omega \in [X_n = v_n]$. Ainsi, $X_n(\omega) = u_n$ ou $X_n(\omega) = v_n$ (le fait d'avoir u_n ou v_n pouvant dépendre de l'indice n).

Ainsi, dans tous les cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \min(u_n, v_n) \leqslant X_n(\omega) \leqslant \max(u_n, v_n).$$

Comme la série de terme général M_n est convergente, et par positivité des séries, la série de terme général $X_n(\omega)$ est convergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Par ailleurs, l'encadrement ci-dessus amène :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M_n.$$

Or, pour tout $n \geqslant 2$, $v_n \leqslant u_n$, donc $m_n = v_n$, et pour $n = 1$, $v_1 = \frac{4}{5} \geqslant \frac{1}{3} = u_1$, donc $m_1 = u_1$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{5^n} = \frac{1}{3} + \frac{4}{5^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{8}{15}.$$

On peut calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ directement, ou alors, se rappeler que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 2,$$

d'où il vient immédiatement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = 2 - \frac{8}{15} = \frac{22}{15}$.

On a donc bien montré que

$$\frac{8}{15} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leqslant \frac{22}{15}.$$

(b) • On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \frac{22}{15}$ si et seulement si $X_1(\omega) = v_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $X_n(\omega) = u_n$. Ainsi :

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}\right] = [X_1 = v_1] \cap \bigcap_{n=2}^{+\infty} [X_n = u_n].$$

Puisque les X_n sont indépendantes, pour tout $N \geqslant 2$,

$$P\left([X_1 = v_1] \cap \bigcap_{n=2}^{N} [X_n = u_n]\right) = P(X_1 = v_1) \cdot \prod_{n=2}^{N} P(X_n = u_n) = \frac{1}{2^N}.$$

D'après le théorème de limite monotone,

$$P\left([X_1 = v_1] \cap \bigcap_{n=2}^{+\infty} [X_n = u_n]\right) = 0.$$

• La deuxième probabilité à calculer est un peu plus subtile. Il faut raisonner en discutant suivant la valeur de X_1 :

  ∗ Si $X_1(\omega) = u_1 = \frac{1}{3}$, puisque pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > v_n$, et puisque $\sum u_n = 1$, la seule façon d'obtenir une somme égale à 1 est d'avoir pour tout $n \geqslant 2$, $X_n(\omega) = u_n$ (sinon, on obtient une somme trop petite)

  ∗ Si $X_1(\omega) = v_1 = \frac{4}{5}$, de la même façon, il faut alors avoir pour tout $n \geqslant 2$, $X_n(\omega) = v_n$, sinon on obtient une somme trop grande.

Ainsi,

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1\right] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n = u_n] \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n = v_n],$$

donc, par incompatibilité de ces 2 événements,

$$P\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1\right] = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n = u_n]\right) + P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n = v_n]\right),$$

et on obtient 0 par le même raisonnement que ci-dessus.

Correction de l'exercice 16 –

1. On suit l'indication :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln u_n - \ln u_{n-1} &= \ln \frac{u_n}{u_{n-1}} = \ln \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)}{(4n)^4} \\ &= \ln\left(\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(1-\frac{2}{4n}\right)\left(1-\frac{3}{4n}\right)\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{1}{4n}\right) + \ln\left(1-\frac{2}{4n}\right) + \ln\left(1-\frac{3}{4n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule rappelée en début d'énoncé (DL de ln),

$$\ln u_n - \ln u_{n-1} = -\frac{1}{4n} - \frac{2}{4n} - \frac{3}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, il existe une suite (w_n) telle que $\ln u_n - \ln u_{n-1} = -\frac{3}{2n} + w_n$ et $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On obtient alors, par télescopage :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = -\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_n.$$

On utilise alors un équivalent classique de la somme partielle de la série alternée (obtenu par la technique de comparaison avec des intégrales par exemple) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. Par ailleurs, puisque $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\sum w_n$ converge absolument, donc

$$\sum_{k=1}^{n} w_n = o(\ln n)$$

(car elle admet une limite finie) On en déduit que

$$\ln u_n - \ln u_0 \underset{+\infty}{\sim} \ln n,$$

et puisque $\ln(u_0) = o(\ln n)$ (car constante), $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n^{\frac{5}{4}} u_n) = \dfrac{5}{4}\ln n + \ln u_n$, donc :

$$\ln(n^{\frac{5}{4}} u_n) = \frac{5}{4}\ln n - \frac{3}{2}\ln n + o(\ln n) = -\frac{\ln n}{4} + o(\ln n).$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^{\frac{5}{4}} u_n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}} u_n = 0$. Par conséquent, $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.
La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\frac{5}{4} > 1$), donc, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.