Analyse 2bis – Plus d'exercices sur les séries

Correction de l'exercice 2 –

- Si $\sum u_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $1 + u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Les séries étant à termes positifs, le théorème de comparaison par équivalents amène la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$.
- Même raisonnement si $\sum v_n$ converge, où pour tout n, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, en constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$, et que comme précédemment, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ entraîne donc que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. La fin du raisonnement est inchangée.

Correction de l'exercice 3 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\zeta(x)$ est défini si et seulement si $\sum \frac{1}{n^x}$ converge, donc si et seulement si $x > 1$. Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.

Le but de l'exercice est de trouver une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

2. (a) On utilise une comparaison entre séries et intégrales. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [k, k+1], \frac{1}{k^3} \geqslant \frac{1}{x^3} \geqslant \frac{1}{(k+1)^3}$$

d'où, par positivité de l'intégrale,

$$\frac{1}{k^3} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \geqslant \frac{1}{(k+1)^3}$$

On en déduit donc que pour tout $k \geqslant 2$

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \geqslant \frac{1}{k^3} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $N \geqslant n$. Alors, en sommant les inégalités précédentes pour k dans $[\![n+1, N]\!]$, et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_n^N \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \geqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2} \geqslant S_N - S_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2}.$$

Les limites de ces trois termes existent lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème de prolongement des inégalités, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2n^2} \geqslant \zeta(3) - S_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

(b) Il faut dans un premier temps bien comprendre la question. On demande *a priori* une minoration de n_0, c'est-à-dire une entier N tel que n_0 soit plus grand que N (il est vrai que l'énoncé n'est pas très clair). On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta(3) - S_n \geqslant \frac{1}{2n^2}$. Ainsi, si $\frac{1}{2n^2} > 10^{-8}$, alors $\zeta(3) - S_n > 10^{-8}$. Or,

$$\frac{1}{2n^2} > 10^{-8} \iff n^2 > \frac{1}{2} \cdot 10^8 \iff n > \frac{1}{\sqrt{2}} 10^4.$$

Ainsi, pour toute telle valeur de n, S_n n'est pas une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près. On en déduit que $n_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-4}$.

(c) Ainsi, il faut calculer la somme partielle au moins jusqu'au rang $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^4$. Comme on fait une erreur d'arrondi de 10^{-11} sur chaque terme, au total, on fait une erreur d'arrondi de

$$\varepsilon = 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-4} = 10^{-7} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 10^{-8} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, comme $10 > \sqrt{2}$, l'erreur d'arrondi est supérieur à 10^{-8}, la précision souhaitée. Il est donc impossible d'effectuer le calcul de la sorte.

3. Soit a, b et c trois réels. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n \\
&\qquad = \frac{a(n+3)(n+4) + b(n+4) + c + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\varepsilon_n}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&\qquad = \frac{an^2 + (7a+b)n + (12a+4b+c) + \varepsilon'_n}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&\qquad = \frac{an^4 + (7a+b)n^3 + (12a+4b+c)n^2 + n^2\varepsilon'_n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon'_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\varepsilon_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

Ainsi, par identification, l'égalité souhaitée a lieu si

$$\begin{cases} a & = 1 \\ 7a + b & = 10 \\ 12a + 4b + c & = 35 \end{cases}$$

en posant $\varepsilon'_n = \frac{50}{n} + \frac{24}{n^2}$ qui tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le systeme ci-dessus est triangulaire, et se résout facilement en partant du haut. On trouve $a = 1$, $b = 3$ et $c = 11$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{11}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5\varepsilon_n = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon'_n}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{50n + 24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n - \frac{50}{n^6} &= \frac{50n^4 + 24n^3 - 50(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{50n^4 + 24n^3 - 50n^4 - 500n^3 - 1750n^2 - 2500n - 1200}{n^6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{-476n^3 - 1750n^2 - 2500n - 1200}{n^6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} < 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n < \dfrac{50}{n^6}$.

4. Tout d'abord, les trois séries dont on demandde calculer la somme converge, puisqu'elles sont à termes positifs, et que leurs termes génraux sont respectivement équivalents à $\frac{1}{n^3}$, $frac1n^4$ et $\frac{1}{n^5}$, termes généraux de séries de Riemann convergentes.
Justifions ensuite la remarque faite par l'énoncé. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{n+m-n}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{m}{n(n+1)\cdots(n+m)}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right),$$

puisqu'il s'agit d'une somme télescopique. Ainsi, lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right),\end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une somme télescopique. Ainsi, lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3 \cdots 3!}.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\right),\end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une somme télescopique. Ainsi, lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{4 \cdots 4!}.$$

5. On a $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^5}\right)$, et les séries étant à terme positifs, la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^5}$ implique la convergence de la série $\sum \varepsilon_n$. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\zeta(3) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{3}{3 \cdot 3!} + \frac{11}{4 \cdot 4!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(3) - T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k.$$

D'après l'expression de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ trouvée dans la question 3, pour tout $k > n$, $\varepsilon_k > 0$, donc $\zeta(3) - T_n > 0$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_k < \frac{50}{n^6}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{50}{n^6}$.

Procédons par comparaison avec une intégrale. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^6}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\forall x \in [k-1, k], \frac{1}{k^6} \leqslant \frac{1}{x^6} \qquad \text{donc:} \qquad \frac{1}{k^6} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^6}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $N \geqslant n$. En sommant pour toute valeur de k comprise entre $n+1$ et N, on obtient donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{N^5}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leqslant \frac{1}{5n^6},$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta(3) - T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_n < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{50}{n^6} \leqslant \frac{10}{n^5}.$$

6. T_n est une approximation à 10^{-8} près de $\zeta(3)$ si

$$\frac{10}{n^5} < 10^{-8} \qquad \text{soit:} \qquad n^5 > 10^9 \qquad \text{soit:} \qquad n > \frac{1}{\sqrt[5]{10}} \cdot 100.$$

Remarquez que $\sqrt[5]{10}$ est supérieure à 1, ainsi, la valeur limite est inférieure à 100 : cela fait beaucoup moins de termes à calculer que de la première méthode, et en particulier, les erreurs d'arrondi resteront bien inférieures à la précision souhaitée. Plus précisément, la calculatrice donne $n > 63.1$. Ainsi, la meilleure valeur n_0 est 64. Pour avoir une précision de 10^{-8} en comptant les arrondis, il faudrait en fait faire les calculs pour une précision théorique un peu plus importante, par exemple $9 \cdot 10^{-9}$. Ainsi, on trouve :

$$n^5 > \frac{1}{9} 10^{10}, \qquad \text{soit:} \qquad n > 64.43,$$

Ainsi, il faut aller jusqu'au rang 65 (un rang de plus). L'erreur d'arrondi faite sur le calcul est alors au plus de $65 \cdot 10^{-11} < 10^{-9}$. Donc l'erreur totale faite en approchant $\zeta(3)$ par la valeur trouvée pour le calcul de T_{65} est au plus de $9 \cdot 10^{-9} + 10^{-9} = 10^{-8}$.

Correction de l'exercice 4 –

1. $\ln^6 n = o(\sqrt{n})$, donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln^6 n}\right)$. La série diverge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme π est irrationnel, $\sin n \neq 1$ et $\sin n \neq -1$. Donc $n - 1 < n + \sin n < n + 1$. Ainsi, $E(n + \sin n) \in \{n-1, n\}$. On a de même $E(n+1+\sin(n+1)) \in \{n, n+1\}$. Ainsi, $E(n+1+\sin(n+1)) \geqslant E(n + \sin n)$.

   Par conséquent, $\left(\frac{1}{E(n+\sin n)}\right)$ est décroissante, de limite nulle, donc la série considérée est une série altérnée, dont on montre la convergence en prouvant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
3. $n - n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o((\frac{1}{n})^4)\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   D'où le tg est équivalent au tg d'une série de Riemann convergente, puis signe constant au voisinage de $+\infty$, d'où la convergence.

Correction de l'exercice 6 –

1. D'après les croissances comparées, $\ln n = o(\sqrt{n})$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right).$$

Ainsi, d'après la contraposée du théorème de comparaison par négligeabilité, les séries étant à termes positifs, et la série $\sum \frac{1}{n}$ étant une série de Riemann de paramètre 1, donc divergente,

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \text{ est divergente}}.$$

2. • Si $|a| > 1$, alors d'après le théorème de croissance comparée, $\ln n = o(|a|^n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a|^n}{\ln n} = +\infty$. Ainsi, $\sum \dfrac{a^n}{\ln n}$ est grossièrement divergente.
   • Si $|a| < 1$, pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{|a|^n}{\ln n} \leqslant |a|^n$, et la série de terme général $|a|^n$ est convergente, en tant que série géométrique de raison $|a| \in]-1,1[$. Ainsi, les deux séries étant à terme positif, il découle du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum \dfrac{|a|^n}{\ln n}$ converge, donc $\sum \dfrac{a^n}{\ln n}$ converge absolument, donc converge.
   • Si $a = 1$, on a $\ln n = o(n)$, donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, et la divergence de la série de terme général $\sum \frac{1}{n}$ amène la divergence de la série de terme général $\frac{1}{\ln n}$, d'après le théorème de comparaison par négligeabilité, les séries étant à termes positifs.
   • Si $a = -1$, le logarithme étant croissant, la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante, et tend vers 0 en $+\infty$. Soit pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = \sum\limits_{n=2}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\ln k}$. On a alors :
   * Pour tout $n \geqslant 1$,
   $$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+1)} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\ln(2n+2)} = \frac{1}{\ln(2n+2)} - \frac{1}{\ln(2n+1)} < 0.$$
   Ainsi, (S_{2n}) est décroissante.
   * Pour tout $n \geqslant 1$,
   $$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{\ln(2n+2)} + \frac{(-1)^{2n+3}}{\ln(2n+3)} = \frac{1}{\ln(2n+2)} - \frac{1}{\ln(2n+3)} > 0.$$
   Ainsi, (S_{2n+1}) est décroissante.
   * $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+1)} = 0.$
   Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc ont même limite. Ainsi, la suite (S_n) converge aussi, vers cette même limite. Par conséquent, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

   Conclusion : $\boxed{\sum \dfrac{a^n}{\ln n} \text{ converge si et seulement si } a \in [-1,1[}$.
3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$n^2 \ln n \mathrm{e}^{-(n+\alpha)^\beta} = \mathrm{e}^{-(n+\alpha)^\beta + 2\ln n + \ln(\ln n)}$$
   Or, β étant un réel fixé, $(n+\alpha)^\beta \sim_{+\infty} n^\beta$, et β étant strictement positif, $\ln n = o(n^\beta)$, et de même $\ln(\ln n) = o(n^\beta)$. Par conséquent,
   $$-(n+\alpha)^\beta + 2\ln n + \ln(\ln n) \underset{+\infty}{\sim} -n^\beta,$$
   et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n+\alpha)^\beta + 2\ln n + \ln(\ln n) = -\infty$, d'où
   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln n \mathrm{e}^{-(n+\alpha)^\beta} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \ln n \mathrm{e}^{-(n+\alpha)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car de paramètre $2 > 1$), et les séries sont à termes positifs, donc, d'après le théorème de comparaison par négligeabilité, $\boxed{\sum \ln n \mathrm{e}^{-(n+\alpha)^\beta} \text{ converge}}$, quelle que soit la valeur de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
4. Tout d'abord, la série est bien définie, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \in]0,1[$, donc $\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) > 0$, donc on peut élever cette quantité à une puissance quelconque α.
   Puisque $\left(\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ est de limite nulle en $+\infty$, on peut écrire, si $\alpha \neq 0$:
   $$\cos^\alpha\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \left(1 + \left(\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha\left(\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{2n^2}.$$

Ainsi, les séries étant à termes négatifs (car le cosinus est majoré par 1), et la série de terme général $\dfrac{-\alpha}{2n^2}$ étant convergente en tant que série de Riemann de paramètre 2, le théorème de comparaison par équivalence amène la convergence de la série de terme général $\cos^{\alpha}\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)-1$.

Ceci est encore vrai lorsque $\alpha=0$, car dans ce cas, la série est nulle.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \alpha\in\mathbb{R}, \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos^{\alpha}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1 \text{ converge}}$.

5. Puisque $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}-1\right)\underset{+\infty}{\sim}\mathrm{e}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\mathrm{e}}{2n^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison par équivalents, les séries étant à termes tous négatifs, on obtient la $\boxed{\text{convergence de la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}\right)}$.

6. Attention à ne pas utiliser d'équivalent ici ! Cette série n'est pas à terme de signe constant ! C'est d'ailleurs cette série qui fournit le contre-exemple classique au théorème de comparaison par équivalence lorsque le signe n'est pas constant. En effet, comme nous allons le montrer, cette série est divergente, alors que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (série alternée). Pourtant les termes généraux de ces deux séries sont équivalents.

Pour montrer la divergence de cette série, on utilise un développement limité en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\\&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant 2$,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}+v_n,$$

où (v_n) est une suite telle que $v_n=o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or :

- le même argument qu'en (b) (cas $a=-1$) amène la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, du fait que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle (série alternée)
- la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1)
- la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolument (la série des valeurs absolues est une série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}>1$)
- la série de terme général v_n converge absolument, par comparaison par négligeabilité à une série à terme positif convergente (série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}$)

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \text{ est divergente}}$, en tant que somme de 4 séries, dont une et une seule diverge.

Correction de l'exercice 7 –

1. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(1/n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Un très rapide calcul d'équivalent montre que cette expression admet e pour limite en $+\infty$, donc le terme général de la série tend vers 0. Ainsi, la série n'est pas grossièrement divergente.

De plus, au voisinage de $+\infty$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De plus,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{6n^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\sin(1/n)}=n\left(1+\frac{1}{6n^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=n+\frac{1}{6n}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right);$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin(1/n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{2n}+\underset{+\infty}{o}(1n),$$

puis

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}}=\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{2n}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, le terme général de la série est équivalent à $\frac{\mathrm{e}}{2n}$, terme général ***positif*** d'une séri e de Riemann divergente. Ainsi, le terme général de la série considérée est aussi positif, au moins à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin(1/n)}}-\mathrm{e}\right)$ est divergente.

2. On a $\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}\underset{+\infty}{\sim}\frac{3n(n-1)(n-2)}{n!}=\frac{3}{(n-3)!}$.

   Or, $\sum\frac{3}{(n-3)!}$ est convergente en tant que série exponentielle (de paramètre 1). Donc, comme elle à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}$ est aussi à terme positifs, au moins à partir d'un certain rang, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs par équivalences, elle est convergente.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$3n^3-2n^2+n-1=3n(n-1)(n-2)+7n(n-1)+2n-1.$$

   Ainsi, toutes les sommes étant convergentes en tant que sommes exponentielles,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+7\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

   Les premiers termes de chacune de ces séries (sauf la dernière) sont nuls, et il reste donc, après suppression de ces termes nuls :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}&=3\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+7\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\&=3\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}+7\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!},\end{aligned}$$

   par simplification des termes supérieurs des factorielles. On termine par des changements d'indices, amenant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^3-2n^2+n-1}{n!}=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+7\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=11\mathrm{e}.$$

3. Tout d'abord, $\frac{n^3}{3^n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}$ converge en tant que série sérivée d'ordre 3 de la série géométrique (série du binôme négatif), de raison $\frac{1}{3}\in]-,1,1[$. Les séries étant à termes positifs, on en déduit la convergence de $\sum\frac{n^3}{3^n}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^3 = (n+1)(n+2)(n+3) - 6n^2 - 11n - 6 = (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7(n+1) - 1.$$

Ainsi, puisque toutes ces séries convergent en tant que séries du binômes négatifs, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n} - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n} + 7\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{6}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^4} - 6 \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + 7 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{243}{8} - \frac{81}{2} + \frac{63}{4} - \frac{3}{2} = \frac{243 - 324 + 126 - 12}{8} = \frac{27}{8}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 – Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{n}{2^{n-1}} \cos((n-1)x) \right| \leqslant \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Or, $\frac{n}{2^{n-1}}$ est le terme général d'une série du binôme négatif (dérivée de la série géométrique), de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série étudiée est absolument convergente, donc convergente.
De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \cos((n-1)x) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{2})^2}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}-\cos x\right)^2}\right) = \frac{\left(1-\cos x + \frac{1}{4}\cos(2x)\right)^2}{\left(\frac{5}{4}-\cos x\right)^2} = \frac{\left(3 - 4\cos x + 2\cos^2 x\right)^2}{(5-4\cos x)^2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 –

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}$

   La série n'était évidemment définie que pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln n = o(n)$, donc

   $$n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o(n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}})$$

   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-y} = o\left(\frac{1}{y^8}\right)$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{(n+1)^4}\right)$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Ainsi :

   $$n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), $\sum n \ln n \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Si $a = 0$, la série est grossièrement divergente.

   Si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = 0$. Ainsi :

   $$\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^2}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

   Or, $\sum \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ (série de Riemann). Comme la série $\sum -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est à termes positifs, d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries, il en résulte que $\sum \cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 –

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} |(-1)^n \ln(\ln(n))| = +\infty$, donc le terme général ne tend pas vers 0 : $\sum(-1)^n \ln(\ln(n))$ diverge grossièrement.

2. La limite du terme général est nulle $(1-1)$. De plus :
$$\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} = \cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} + 1 = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
d'après les équivalents classiques. Ainsi
$$\cos\left(\sin\frac{1}{n}\right) - \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n^2}.$$
Les termes généraux sont tous négatifs (remarquez que le cosinus est inférieur à 1 alors que l'exponentielle est supérieure à 1). Ainsi, on peut utiliser le théorèmede comparaison par équivalents, qui assure la convergence de la série, du fait de la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

3. On a, pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{1}{E(\ln(n))} \geqslant \frac{1}{\ln n}$, ces termes généraux étant positifs.
Or, $\ln n = o(n)$, donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. Ainsi, ces séries étant à termes positifs, la divergence de $\sum \frac{1}{n}$ assure la divergence de $\sum \frac{1}{\ln n}$, d'après le théorème de comparaison par o (contraposé). Ainsi, d'après le TCSTP, on obtient la divergence de $\sum \frac{1}{E(\ln(n))}$.

4. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la somme partielle. On a :
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sin\frac{1}{2n+2} - \sin\frac{1}{2n+1} < 0$, car $\left(\sin\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
   - $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\sin\frac{1}{2n+3} + \sin\frac{1}{2n+2} > 0$;
   - $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_{2n+1} - S_{2n} = -\sin\frac{1}{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

   Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et leur différence est de limite nulle. Ces deux suites sont adjacentes, et admettent donc une limite commune ℓ. Alors, soit $eps > 0$:
   - $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall n \geqslant N_1, |S_{2n} - \ell| < \varepsilon$;
   - $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall n \geqslant N_1, |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$;

   Ainsi, en posant $N = 2\max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$, $|S_n - \ell| < \varepsilon$. On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, donc que la série converge.

Correction de l'exercice 11 – (Sommation par groupements de termes)

1. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $T_n = S_{p_{n+1}-1}$.
Lorsque $n = 0$, $T_0 = v_0 = \sum\limits_{k=p_0}^{p_1-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{p_1-1} u_k = S_{p_1-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est satisfait.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors
$$T_{n+1} = T_n + v_{n+1} = \sum_{k=0}^{p_{n+1}-1} u_k + \sum_{p_{n+1}}^{p_{n+2}-1} u_k = \sum_{k=0}^{p_{n+2}-1} u_k = S_{p_{n+2}-1}.$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de (S_n). Ainsi, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, et vers la même limite. Par conséquent, si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ aussi, et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
Pour cette implication, on n'a pas besoin de supposer que $\sum u_n$ est à termes positifs.

3. Supposons que $\sum v_n$ converge. Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, et que $p_0 = 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant p_{n+1} - 1$. Ainsi, les série $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant à termes positifs,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n \leqslant S_{p_{n+1}-1} = T_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme elle est croissante, elle converge.

4. Les deux questions précédentes montrent que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge : les deux séries sont de même nature. De plus, si elles convergent, d'après la question 2, leurs sommes sont égales.
5. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, et $p_n = 2n$. Alors $\sum u_n$ diverge grossièrement, et pour tout $n_{\in}\mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 1 - 1 = 0$, donc $\sum v_n$ converge.