Analyse 3 – Intégrales impropres

Correction de l'exercice 1 –

1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$. La fonction f est continue sur $]0,1[$, donc I_1 possède deux impropretés en 0 et en 1. On peut remarquer que $f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$, qui est de signe constant au voisinage de 0^+. Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, I_1 diverge. On peut aussi le prouver en constatant qu'une primitive de f est $F : x \mapsto \ln|x-1| - \ln x$, qui n'a pas de limite finie en 0^+.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$. Cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$ d'où une unique impropreté en $+\infty$. De plus, une primitive de F est :
$$F : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right),$$
qui admet une limite finie (nulle) en $+\infty$. Ainsi :
$$I_2 = \Big[F(x)\Big]_0^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \ln 2.$$
3. Soit $f : x \mapsto \tan x$. Cette fonction est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}$, d'où une unique impropreté en $\frac{\pi}{2}$. Une primitive de f est $F : x \mapsto -\ln(\cos x)$, qui n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, I_3 diverge
4. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, qui est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, I_4 a deux impropretés en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Une primitive de f est $F : x \mapsto -2\sqrt{\cos x}$, qui tend vers 0 en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$. D'où la convergence de I_4, et
$$I_4 = \Big[-2\sqrt{\cos(x)}\Big]_{\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}}}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}} = 0.$$
(la valeur ne nous étonne pas, par imparité de la fonction. Mais l'imparité ne suffit pas à justifier la convergence !)
5. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Une primitive : $F : x \mapsto \tan x$, qui n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$, donc I_5 diverge.
6. Soit $f : \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$, continue sur $[0,+\infty[$, et équivalente à $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$, d'où la convergence. Une primitive (s'obtient par DES) :
$$F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4}$, donc
$$I_6 = \Big[F(x)\Big]_0^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \frac{\pi}{4}.$$
7. Soit f l'intégrande, continue sur $]1,2]$, d'où une impropreté en 1.
   - Si $\beta \neq 1$, une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta} x$. Ainsi$F$ admet une limite finie en 1 si et seulement si $1-\beta > 0$, donc $\beta < 1$. Ainsi, on a divergence si $\beta > 1$, et convergence si $\beta < 1$, et dans ce cas,
   $$I_7 = \left[\frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta} x\right]_{\lim\limits_{x\to1^+}}^{2} = \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{1-\beta}.$$
   - Si $\beta = 1$, une primitive est $F : \ln(\ln x)$, qui n'a pas de limite finie en 1, d'où la divergence.

   Soit f l'intégrande, continue sur $[3,+\infty[$, d'où une impropreté en $+\infty$.
   - Si $\beta \neq 1$, une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{1}{1-\beta}(\ln\ln x)^{1-\beta}$. Ainsi F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1-\beta < 0$, donc $\beta > 1$. Ainsi, on a divergence si $\beta < 1$, et convergence si $\beta > 1$, et dans ce cas,
   $$I_7 = \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln\ln x)^{1-\beta}\right]_3^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \frac{(\ln\ln(3))^{1-\beta}}{\beta-1}.$$
   - Si $\beta = 1$, une primitive est $F : \ln(\ln(\ln x))$, qui n'a pas de limite finie en $+\infty$, d'où la divergence.

Correction de l'exercice 2 – (résultat du cours) Si f admet une limite finie non nulle en $+\infty$, alors f est de signe constant au voisinage de $+\infty$ (disons positif, on se ramène à ce cas, en considérant éventuellement $-f$). Comme $\frac{1}{x}$ est de limite nulle quand x tend vers $+\infty$, et f de limite non nulle, on a $\frac{1}{x} = o(f(x))$, et la contraposée du théorème de comparaison par négligeabilité amène la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$.

Correction de l'exercice 5 – Soit$x > 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis entre a et x, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, x[$, continue sur $[a, x]$, et f' étant minorée sur $[a, x]$ par α, on a :

$$f(x) - f(a) \geqslant \alpha(x-a) \qquad \text{donc:} \qquad f(x) \geqslant f(a) + \alpha(x-a).$$

Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{f(x)}{x^2} \geqslant \dfrac{f(a)}{x^2} + \alpha\dfrac{x-a}{x^2}$.
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(a)}{x^2}\ dx$ est convergente, en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2, et de plus

$$\frac{x-a}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

donc, les deux expressions étant positives au voisinage de $+\infty$, il en découle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-a}{x^2}\ dx$ diverge, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre 1. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{f(a)}{x^2} + \alpha\frac{x-a}{x^2}\right)\ dx$ diverge, comme somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison par inégalité, la fonction minorante étant positive pour x assez grand (donc la majorante aussi), on obtient la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\ dx$.

Correction de l'exercice 6 –

1. La fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $[0, 1[$. On a, pour tout x de $[0, 1[$:

   $$|x^n f(x)| \leqslant |f(x)|,$$

   et, par hypothèse, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\ dx$ converge, donc, d'après le théorème de comparaison, les fonctions comparées étant positives, $\displaystyle\int_0^1 |x^n f(x)|\ dx$ est convergente, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Soit $\varepsilon > 0$
   (a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\ dx$ étant convergente, la fonction $y \mapsto \int_y^1 |f(x)|\ dx$ tend vers 0 lorsque y tend vers 1. Ainsi, il existe a tel que

   $$\int_a^1 |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   De plus, pour tout $x \in [a, 1[$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n f(x)| \leqslant |f(x)|$, donc, par la propriété de croissance de l'intrégrale,

   $$\int_a^1 |x^n f(x)|\ dx \leqslant \int_a^1 |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   D'après l'inégalité triangulaire, l'intégrale étant absolument convergente, il vient alors :

   $$\left|\int_a^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^1 |x^n f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) Soit a fixé comme ci-dessus. la fonction $|f|$ est alors continue sur $[0, a]$ fermé borné, donc elle est bornée. Ainsi, il existe M tel que pour tout $x \in [0, a]$, $|f(x)| \leqslant M$. On a alors, toujours d'après l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

   $$\left|\int_0^a f(x)x^n\ dx\right| \leqslant \int_0^a |f(x)|x^n\ dx \leqslant \int_0^a Mx^n = M\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

(c) La suite $\left(M\frac{a^{n+1}}{n+1}\right)$ converge vers 0, puisque $a \in [0,1[$. Ainsi, il existe N tel que

$$\forall n \leqslant N, \quad \left|\int_0^a f(x)x^n \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, pour tout $n \geqslant N$:

$$\left|\int_0^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^a f(x)x^n \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par définition de la convergence d'une suite, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Correction de l'exercice 7 – (Rédaction à parfaire : ce ne sont que des schémas des calculs)

4. Impropreté en 0 seulement. IPP en posant pour tout t de $]0,1]$:

$$u'(t) = t^\alpha \qquad u(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad v(t) = \ln t \qquad v'(t) = \frac{1}{t}.$$

La fonction uv tend vers 0 donc IPP sur l'intégrale impropre, en comparant d'abord la nature de l'intégrale (la seconde CV car c'est une intégrale de Riemann) :

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{\mathrm{d}t} = -\int_0^1 \frac{t^\alpha}{\alpha+1} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

5. On va être obligé de séparer l'intégrale, afin de faire une IPP sur le deuxième terme seulement. La première des deux intégrales au moins étant divergente, on ne peut pas le faire sans restreindre l'intervalle d'intégration. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$,

$$\int_a^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x = b - a - \int_a^b x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, une IPP (validité à justifier) donne

$$\begin{aligned} I(a,b) = \int_a^b x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \int_a^b \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} a. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_a^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x = b - a - \left(\frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} a.\right)$$

On fait tendre a vers 0, sans problème :

$$\int_0^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x = b - \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b.$$

On fait tendre b vers $+\infty$, en utilisant $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0 :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

6. Une impropreté en $+\infty$. Convergence immédiate par $x^2 f(x)$, du fait de l'exponentielle.
cdv : $y = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, $x = \ln(y^2-1)$, $\mathrm{d}x = \frac{2y}{y^2-1}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{y^2-1} \,\mathrm{d}y = \left[\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\lim_{+\infty}} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

7. Mise sous forme canonique :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8. Prendre $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ (sinon ce n'est pas défini). Impropretés en 1 et 2.

$$I = \int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}. \qquad \text{cdv } y = 2x-3 : I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y. \qquad \text{cdv } y = \sin t : I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \pi.$$

Correction de l'exercice 10 –

1. $I_1 = 4$ (utiliser la fonction Γ !)
2. $I_2 = 38\mathrm{e}^{-2}$ (cdv et développement du binôme)
3. $I_3 = 3$ (cdv)
4. $I_4 = \frac{5\sqrt{\pi}}{72\sqrt{3}}$ (cdv $u = 3t$, puis se ramener à $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$)
5. $I_5 = 23$ (cdv $x = -t$)
6. $I_6 = 6 + \sqrt{\pi}$ (parité /imparité pour ramener à $\displaystyle\int_0^{+\infty}$)
7. $I_7 = \sqrt{\pi}$ (cdv puis intégrale de Gauss)
8. $I_8 = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}$ (mise sous forme canonique, puis cdv)
9. $I_9 = \mathrm{e}^{\frac{7}{2}}\sqrt{\pi}$
10. $I_{10} = \frac{n!}{2}$ (cdv $y = x^2$)
11. $I_{11} = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
12. $I_{12} = \frac{e^{10}\sqrt{\pi}}{2}$ (mise sous forme canonique puis cdv)

Correction de l'exercice 13 – (Étude de la fonction Γ)

1. On rappelle que d'après le cours, Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. Alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \geqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

car la fonction intégrée est positive et $]0,1] \subset]0,+\infty[$. De plus, pour tout $t \in]0,1]$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, donc, t^{x-1} étant positif, et par propriété de croissance de l'intégrale,

$$\Gamma(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\Gamma(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{t^x}{x}\right]_{\lim_{0^+}}^1 = \frac{1}{x\mathrm{e}}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\mathrm{e}} = +\infty$, donc, d'après le théorème d'existence d'une limite infinie par minoration, Γ admet une limite en 0^+, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Soit $x > 1$. De la même façon, puisque la fonction intégrée est positive, et que $[2,+\infty[\subset]0,+\infty[$, on a :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 2^{x-1}\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

car la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est croissante sur $[2,+\infty[$ (puisque $x-1>0$), donc minorée sur cet intervalle par sa valeur en 2.
Ainsi, pour tout $x > 1$,

$$\Gamma(x) \geqslant 2^{x-1}\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_2^{+\infty} = \frac{2^{x-1}}{\mathrm{e}^2}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x-1}}{\mathrm{e}^2} = +\infty$, donc, d'après le théorème de minoration, Γ admet une limite en $+\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

3. À t fixé, $x \mapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^{+\infty}$) sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que composée d'une fonction affine et d'une exponentielle. Ainsi, f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque e^{-t} est une constante par rapport à x. De plus (on dérive *par rapport à x*) :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_t'(x) = \mathrm{e}^{-t}\ln t \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} = \mathrm{e}^{-t}\ln t \cdot t^{x-1}, \qquad \text{puis:} \qquad f_t''(x) = \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^2\mathrm{e}^{(x-1)\ln t} = \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^2 t^{x-1}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$.

   (a) Soit $\alpha_x = \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, donc sur le sous-intervalle $[x-\alpha_x, x+\alpha_x]$. Or, puisque $|h| \leqslant \alpha_x$, $x+h$ est dans cet intervalle. Donc, d'après l'inégalité de Taylor Lagrange appliquée entre x et $x+h$,
$$|f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2(t,x),$$
   où $M_2(t,x)$ est un majorant de $|f_t''|$ sur l'intervalle $[x-\alpha_x, x+\alpha_x]$ (il peut dépendre de t et x qui sont fixés, mais pas de h). Remarquez que l'inégalité de l'énoncé n'est pas définie lorsque $h = 0$, nous rajoutons donc l'hypothèse $h \neq 0$. Dans ces conditions, on peut diviser par $|h|$ et on obtient :
$$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}M_2(t,x),$$
   Vous aurez rectifié par vous-même la valeur absolue manquante.
   Déterminons une valeur possible de $M_2(t,x)$.
   - Supposons $t \geqslant 1$. Alors pour tout $y \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$,
$$|f_t''(y)| = (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{y-1} \leqslant (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^x,$$
     car, puisque $\alpha_x \leqslant 1$, $y \leqslant x+1$, donc $y-1 \leqslant x$, et de plus $t \geqslant 1$.
   - Supposons $t < 1$. Alors par le même raisonnement $y \geqslant x - \alpha_x \geqslant x - \frac{x}{2}$, donc $y - 1 \geqslant \frac{x}{2} - 1$, et comme $0 < t < 1$, $t^{y-1} \leqslant t^{\frac{x}{2}-1}$. Ainsi,
$$|f_t''(y)| \leqslant (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{x}{2}-1},$$

   On peut donc choisir $M_2(t,x)$ comme étant égal à une de ces deux valeurs, en discutant suivant la valeur de t.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - La fonction $g : t \mapsto (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{x}{2}-1}$ est continue sur $]0,1]$. La seule impropreté de l'intégrale se trouve donc en 0. Or, en 0, on a
$$t^{-\frac{x}{4}+1}|g(t)| = t^{\frac{x}{4}}(\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}.$$
     Puisque $\frac{x}{4} > 0$, les croissances comparées ntre puissances et logarithme en 0 amènent :
$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{x}{4}+1}|g(t)| = 0, \qquad \text{donc:} \qquad |g(t)| = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\right).$$
     Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\frac{x}{4}}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1 - \frac{x}{4} < 1$, donc, les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_0^1 |g(t)|\ \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$ converge, donc converge absolument.
   - La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^x$ est continue sur $[1,+\infty[$. La seule impropreté de l'intégrale se situe dons en $+\infty$. Or, l'exponentielle « va l'emporter ». Plus précisément, d'après les croissances comparées,
$$(\ln t)^2 = \underset{+\infty}{o}(t) \qquad \text{donc:} \qquad (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} = \underset{+\infty}{o}(t^{\frac{x}{2}}).$$
     De plus, d'après les croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{2+\frac{x}{2}}}\right)$, donc :
$$h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{t^{\frac{x}{2}}}{t^{2+\frac{x}{2}}}\right) \qquad \text{donc:} \qquad h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
     Ainsi, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2, et par positivité des fonctions, on en déduit, d'après le théorème de comparaison par o que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

(c) On déduit de la question précédente que, à x fixé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Alors, par le théorème de comparaison par inégalité, pour tout $h \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$, $h \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\ \mathrm{d}t$ converge absolument. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t.$$

Or, par les propriétés de convergence de l'intégrale Γ, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x+h)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x)\ \mathrm{d}t$ convergent. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\ \mathrm{d}t$ converge également, on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t$. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x+h)\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f_t(x)\ \mathrm{d}t}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient, pour tout $h \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$, $h \neq 0$:

$$\left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est convergente, et sa valeur ne dépend par de h, donc

$$\lim \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t'(x)$ ne dépend pas de h, on en déduit que $\dfrac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0, donc que Γ est dérivable en x, et que :

$$\Gamma'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, Γ est dériable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'expression ci-dessus donnant l'expression de Γ' en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

5. L'expression trouvée pour f_t'' montre clairement que f_t'' est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f_t' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à t fixé. Soit donc $0 < x < y$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_t'(x) \leqslant f_t'(y)$. Par la propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit, ces intégrales étant convergentes, que :

$$\int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f_t'(y)\ \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \Gamma'(x) \leqslant \Gamma'(y).$$

Ainsi, Γ' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 14 –

1. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+t^2}$, définie et continue sur $]0,+\infty[$. La continuité assure que l'intégrale définissant $F(x)$ n'est impropre qu'en 0 et en $+\infty$.
   - On a $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^x$, et $\displaystyle\int_0^1 t^x\ \mathrm{d}x$ étant une intégrale de Riemann en 0 de paramètre $-x$, elle converge si et seulement si $x > -1$. Les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.
   - On a $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{x-2}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-2}\ \mathrm{d}x$ étant une intégrale de Riemann en $+\infty$ de paramètre $-x+2$, elle converge si et seulement si $x < 1$. Les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x < 1$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}$ dt converge si et seulement si $-1 < x < 1$. Par conséquent, le domaine de définition de F est $\boxed{D =]-1,1[}$.

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t.$$

On effectue sur l'intégrale définissant $F(-x)$ le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant, bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$. Ainsi :

$$F(-x) = -\int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{(-\ \mathrm{d}u)}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = F(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est paire sur }]-1,1[.}$

De plus, on a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 0 = \boxed{\frac{\pi}{2} = F(0)}.$$

3. (a) Soit $x \in]-1,1[$.

- pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 2$, donc $\dfrac{t^x}{1+t^2} \geqslant \dfrac{t^x}{2}$, et, les intégrales étant convergentes (la seconde en tant qu'intégrale de Riemann) :

$$\int_0^1 f_x(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^x}{2}\ \mathrm{d}t.$$

- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $1+t^2 \leqslant 2t^2$, donc $\dfrac{t^x}{1+t^2} \geqslant \dfrac{t^x}{2t^2} = \dfrac{t^{x-2}}{2}$, et, les intégrales étant convergentes (la seconde en tant qu'intégrale de Riemann) :

$$\int_1^{+\infty} f_x(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-2}}{2}\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, en sommant ces deux inégalités, et d'après la relation de Chasles, il vient, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\boxed{F(x) \geqslant \int_0^1 \frac{t^x}{2}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-2}}{2}\ \mathrm{d}t}.$$

(b) En calculant ces intégrales, il vient, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F(x) \geqslant \frac{1}{2(x+1)}(1-0) + \frac{1}{2(x-1)}(0-1) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)}.$$

Or,

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)} = +\infty.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to-1^+} F(x) = \lim_{x\to1^-} F(x) = +\infty}$.

4. Soit $x \in [0,1[$, et a un réel tel que $x < a < 1$. Soit $t \in]0,+\infty[$.

La fonction $g_t : y \mapsto \frac{t^y}{1+t^2} = \frac{\mathrm{e}^{y \ln t}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,a]$, comme composée et quotient de fonctions qui le sont, et

$$\forall y \in [0,a],\quad g_t'(y) = \frac{(\ln t)t^y}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad g_t''(y) = \frac{(\ln y)^2 t^y}{1+t^2}.$$

or, pour tout $y \in [0,a]$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $t^y \leqslant t^a$ si $t \geqslant 1$, et $t^y \leqslant 1$ si $t \leqslant 1$. En mutlipliant par $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}$ qui est positif, on obtient donc :

$$\forall y \in [0,a], \forall t \in]0,+\infty[,\quad \begin{cases} |g_t''(y)| \leqslant 1 & \text{si } t \in]0,1] \\ |g_t''(y)| \leqslant t^a & \text{si } t \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

Ainsi, étant donné $t \in]0,+\infty[$ et $y \in [0,a]$, g_t étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,a]$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et y, il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \left|\dfrac{t^y}{1+t^2} - \dfrac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\dfrac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{(y-x)^2}{2}\dfrac{(\ln t)^2}{1+t^2} & \text{si } t \in]0,1] \\ \left|\dfrac{t^y}{1+t^2} - \dfrac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\dfrac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{(y-x)^2}{2}\dfrac{(\ln t)^2 t^a}{1+t^2}. & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}}$$

5. • Étude de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $h : t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}$ est continue sur $]0,1]$. Ainsi, l'intégrale I n'est impropre qu'en 0. Or, puisque

$$\sqrt{t}\cdot h(t) = \frac{\sqrt{t}\cdot(\ln t)^2}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}\cdot(\ln t)^2,$$

le théorème de croissance comparée amène : $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{t}h(t) = 0$, donc $h(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} < 1$ en 0. D'après le critère de comparaison par négligeabilité, les fonctions étant positives, $\boxed{I \text{ converge}}$.

• Étude de $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2 t^a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $k : t \mapsto \frac{(\ln t)^2 t^a}{1+t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Ainsi, l'intégrale J n'est impropre qu'en $+\infty$. Or, d'après les croissances comparées, puisque $\frac{1-a}{2} > 0$, au voisinage de $+\infty$:

$$(\ln t)^2 = o(t^{\frac{1-a}{2}}) \qquad \text{et} \qquad \frac{t^a}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-a}}.$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$:

$$k(t) = o\left(\frac{t^{\frac{1-a}{2}}}{t^{2-a}}\right) = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}-\frac{a}{2}}}\right).$$

Or, $\frac{3}{2} - \frac{a}{2} > 1$, car $a < 1$, donc l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}-\frac{a}{2}}}$ est convergente. On en déduit, par théorème de comparaison par négligeabilité, les fonctions étant positives, que $\boxed{J \text{ converge}}$.

6. I et J étant convergentes, on déduit du théorème de comparaison par inégalité, que

$$\int_0^1 \left|\frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right| \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \left|\frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right| \,\mathrm{d}t$$

sont convergentes, donc que

$$\int_0^1 \left(\frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{t^y}{1+t^2} - \frac{t^x}{1+t^2} - (y-x)\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$$

sont absolument convergentes. De plus, on montre comme plus haut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, d'après la linéarité, l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^1 \left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t\right| + \left|\int_1^{+\infty} \left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right)\right| \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \left|\left(\frac{g_t(y)-g_t(x)}{y-x} - \frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\right)\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{|y-x|}{2}(I+J).
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{\substack{y\to x\\ y\in[0,a]\\ y\neq x}} \frac{|y-x|}{2}(I+J)=0$,, donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in[0,a]\\ y\neq x}} \frac{F(y)-F(x)}{y-x}=\int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Si $x\neq 0$, ceci représente la limite (des deux côtés), alors que si $x=0$, puisqu'on impose aussi $y\geqslant 0$, ceci ne représente que la limite à droite. Ainsi :

- Si $x\in]0,1[$, $\boxed{F \text{ est dérivable en } x, \text{ et } F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$
- Si $x=0$, $\boxed{F \text{ est dérivable à droite en } 0, \text{ et } F'_d(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$

7. Les deux intégrales considérées sont convergentes (on a déjà mentionné plus haut la convergente de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$). Ainsi, le changement de variables $u=\frac{1}{t}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant sur $]0,1]$, bijectif de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$, amène l'égalité :

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int_1^{+\infty}\frac{-\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,$$

et la variable d'intégration étant une variable muette, il vient bien :

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}}$$

On a donc, d'après la relation de Chasles, et l'égalité précédente :

$$F'_d(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\boxed{0=F'_d(0)}.$$

Or, F étant paire, F est aussi dérivable à gauche en 0, et $F'_g(0)=-F'_d(0)=0$. Ainsi, $F'_g(0)=F'_d(0)=0$, donc $\boxed{F \text{ est dérivable en } 0, \text{ et } F'(0)=0}$.

8. (a) Soit $x\in]-1,1[$. Le même changement de variable $u=\frac{1}{t}$ que plus haut amène :

$$\int_0^1\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\left(\ln\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^x}}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int_1^{+\infty}\frac{-(\ln u)\frac{1}{u^x}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

La variable d'intégration étant muette, il vient alors, d'après la relation de Chasles :

$$F'(x)=\int_0^1\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)\frac{1}{t^x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et donc :

$$\boxed{F'(x)=\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)\left(t^x-\frac{1}{t^x}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

(b)
- Pour tout $t\geqslant 1$, et tout $x\in]-1,0]$, $t^x\leqslant 1\leqslant\frac{1}{t^x}$, donc, par positivité de l'intégrale, $F'(x)\leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est décroissante sur }]-1,0].}$
- Pour tout $t\geqslant 1$, et tout $x\in[0,1[$, $t^x\geqslant 1\geqslant\frac{1}{t^x}$, donc, par positivité de l'intégrale, $F'(x)\geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est croissante sur } [0,1[.}$
- Pour tout $t\geqslant 1$, la fonction $x\mapsto t^x$ est croissante sur $]-1,1[$, et la fonction $x\mapsto\frac{1}{t^x}$ est décroissante. Donc la fonction $x\mapsto t^x-\frac{1}{t^x}$ est croissante sur $]-1,1[$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que F' est croissante sur $]-1,1[$, donc que $\boxed{F \text{ est convexe sur }]-1,1[.}$

(c) On obtient l'allure suivante pour F (voir figure 1)

Correction de l'exercice 15 –

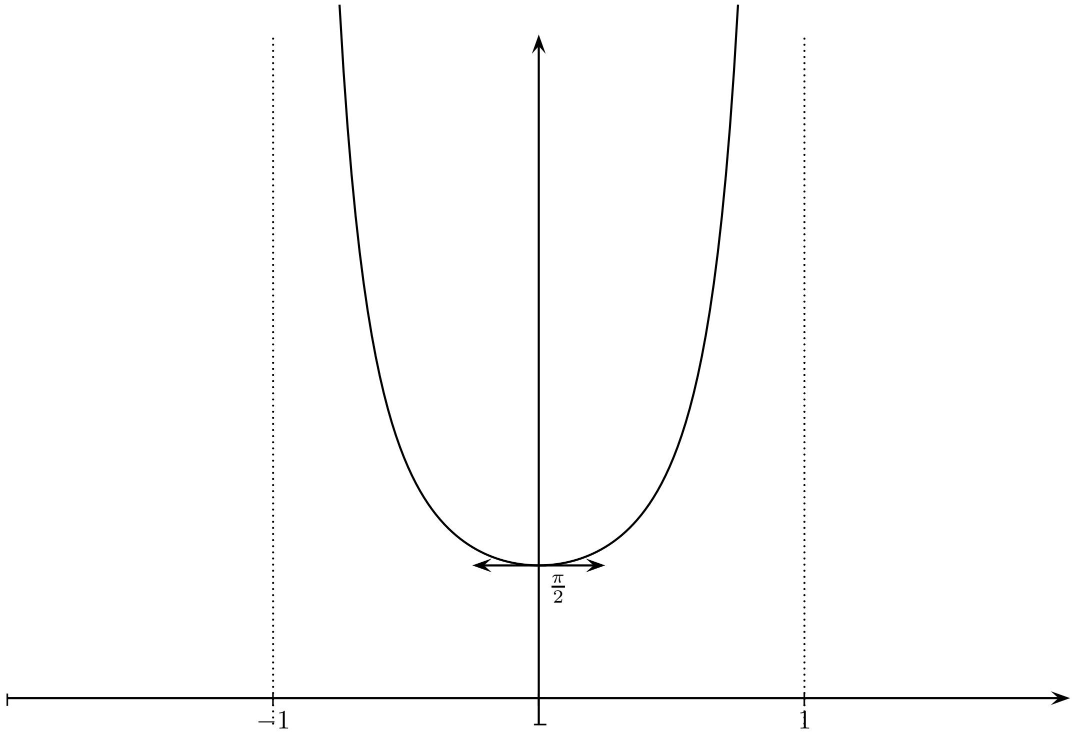

FIG. 1 – Graphe de F

- Commençons par déterminer le domaine de définition de F : une étude de continuité rapide montre que les seules impropretés sont en 0 et en $+\infty$

  En 0, $\left|\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-xt}\right| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc, les fonctions étant positives, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ étant convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$ en 0, on en déduit que l'intégrale définissant $F(x)$ est convergente en 0, ceci quelle que soit la valeur de x.

  En $+\infty$:

  $*$ Si $x > 0$, alors pour tout $t \geqslant 1$, on a :

  $$\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt},$$

  et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$ est convergente (intégrale exponentielle). Donc, d'après le théorème de comparaison par inégalités d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

  $*$ Si $x = 0$, on est ramené à l'étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Faisons une intégration par parties, en posant

  $$\forall t \in [1, +\infty[, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad u'(t) = \frac{-1}{2t\sqrt{t}}, \qquad v(t) = \sin t, \qquad v'(t) = \cos t.$$

  Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Or, pour tout $t \geqslant 1$,

  $$\left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}},$$

  donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, les fonctions étant positives, on obtient la convergence absolue, donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$, donc la convergence (mais pas absolue) de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

  $*$ Si $x < 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

  $$\forall t \in [2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}], \quad \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-xt} \geqslant \cos t \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}},$$

le cosinus étant positif sur cet intervalle. Ainsi :

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-x(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}} \int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cos t = \frac{\mathrm{e}^{-x(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}} \Big[\sin t\Big]_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{2\mathrm{e}^{-x(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}.$$

Or, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{-x(2n\pi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}} = +\infty,$$

puisque $x < 0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = +\infty.$$

Si l'intégrale était convergente cette limite devrait être nulle (différence de deux intégrales partielles dont les bornes supérieures tendent vers $+\infty$, donc les deux intégrales partielles aurait même limite en cas de convergence)

Ainsi, si $x < 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$ diverge.

Par conséquent, $\boxed{D_F = [0, +\infty[}$.

La fonction F n'est en fait pas dérivable en 0 (nous ne le démontrerons pas), nous nous contentons donc d'obtenir sa dérivabilité sur $]0, +\infty[$.

Soit $t > 0$ fixé, et $f_t : x \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-tx}$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad f_t'(x) = -t \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}\cos t \mathrm{e}^{-tx} \qquad \text{et} \qquad f_t''(x) = t\sqrt{t}\cos t \mathrm{e}^{-tx}.$$

Soit $x \in]0, +\infty[$, et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| < \frac{x}{2}$. Alors, pour tout $y \in [x - |h|, x + |h|]$, on a $\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3x}{2}$.
Ainsi,

$$\forall y \in [x - |h|, x + |h|],\quad |f_t''(y)| \leqslant t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}.$$

Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Taylor à l'ordre 1 à la fonction f_t entre x et $x + h$, f_t étant de classe $\mathcal{C}^2$ entre ces deux valeurs, et $|f_t''|$ étant majorée par $t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ entre ces deux valeurs, on obtient :

$$|f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t > 0$. Or, $t \mapsto t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\ dt$ est faussement impropre (donc convergente) en 0, et impropre en $+\infty$. Mais, puisque $\frac{x}{2} > 0$, d'après les croissances comparées,

$$\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right) \qquad \text{donc:} \qquad t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ étant convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$, d'après le théorème de comparaison par négligeabilité d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sqrt{t}|\cos t|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\ dt$ est convergente. Notons $I(x)$ sa valeur.

D'après le théorème de comparaison par inégalité d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)|\ \mathrm{d}t$ est aussi convergente, et que :

$$\int_0^{+\infty} |f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h^2}{2} I(x).$$

Puisque $\int_0^{+\infty} |f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'|\ \mathrm{d}t$ converge, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'\ \mathrm{d}t\right|$ converge absolument, et d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^{+\infty} f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h^2}{2} I(x).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale (2 des trois termes étant convergeants, donc le troisième aussi), et en divisant par $|h|>0$, il vient alors :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_0^{+\infty} t\cos t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}I(x).$$

Puisque $I(x)$ ne dépend pas de h, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{2}I(x)=0$, donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\int_0^{+\infty} t\cos t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, $\boxed{F \text{ est dérivable en tout } x\in\mathbb{R}_+^*}$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \boxed{F'(x)=\int_0^{+\infty} t\cos t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.}$$

Correction de l'exercice 16 – On définit, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

1. Les fonctions sh, ch et th sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, en tant que sommes, quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur (pour th) ne s'annulant pas (ch est strictement positif). On a :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ \mathrm{sh}'(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x,\qquad \mathrm{ch}'(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{sh}(x)\qquad\text{et}\qquad \mathrm{th}'x=\frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$
2. Puisque $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$, sh' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On n'a aucune forme indéterminée pour le calcul des limites et on obtient directement :
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty.$$
3. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$|\mathrm{ch}x|=\frac{|\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}|}{2}\geqslant\frac{||\mathrm{e}^x|-|\mathrm{e}^{-x}||}{2}=\frac{|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=|\mathrm{sh}x|,$$
d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)\geqslant 0$, et donc $\mathrm{th}'\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, th est croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,
$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\underset{-\infty}{\sim}\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}}=-1.$$
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{th}(x)=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}x=1$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :
$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=\frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2\right)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{2x}+2-\mathrm{e}^{-2x}\right)=1.$$
5. La fonction $x\mapsto\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc on a deux impropretés, en $-\infty$ et en $+\infty$. On a :
$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\underset{-\infty}{\sim}\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$
Donc, par comparaison aux deux bornes avec deux intégrales de Riemann convergentes (car de paramètre $\frac{3}{2}>1$ en des bornes infines), et par positivité des fonctions, on en déduit que l'intégrale est convergente.
On fait le changement de variable $x=\mathrm{sh}y$ (désolé, j'avais inversé x et y, mais les variables étant muettes...), donc $\mathrm{d}x=\mathrm{ch}y\,\mathrm{d}y$. Alors sh étant, d'après l'étude qui précède, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}y\,\mathrm{d}y}{(1+\mathrm{sh}^2y)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}y\,\mathrm{d}y}{(\mathrm{ch}^2y)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{ch}^2y},$$
d'après la relation du (iv). Ainsi, d'après l'expression de la dérivée de th, et la relation (iv), on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\Big[\mathrm{th}y\Big]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}}=1-(-1)=2.$$