Correction Analyse 4 – Feuille technique

Calculez, et vous deviendrez bons.

Correction de l'exercice 2 – On note à chaque fois F les primitives. L'expression $+C$ signifie qu'on obtient toutes les primitives en ajoutant à l'expression donnée n'importe quelle constante réelle.

1. $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   N'hésitez par à écrire le dernier terme sous la forme $x^{-\frac{3}{2}}$ pour vous aider à le primitiver
2. $F(x) = \dfrac{3}{2}(\operatorname{Arctan} x)^{\frac{2}{3}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement sur $\mathbb{R}_-^*$)
   En effet, on a une expression de la forme $u'u^{-\frac{1}{3}}$
3. $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + C$, sur $\mathbb{R}$.
   En effet, le polynôme de degré 2 est toujours positif ($\Delta > 0$), et on a une expression du type $\frac{1}{2} \cdot u' \cdot u^{\backslash \frac{1}{2}}$.
4. $F(x) = \ln(|\ln x|) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet on a du $\frac{u'}{u}$.
5. $F(x) = -\cos(\mathrm{e}^x) + C$ sur $\mathbb{R}$
6. N'admet pas de primitive explicitable (on est ramené à $\int \frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y$ après changement de variable, donc à une primitive pour l'intégrale de Dirichlet).
7. Par composition : $F(x) = \tan(\ln x) + C$.
   Si on ne voit pas la composition, on peut aussi faire un changement de variable $y = \ln t$ sur l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
8. $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + C$
   En effet, c'est $\frac{u'}{u}$.
9. Le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on pourra donc écrire cette fraction rationnelle sous la forme $\frac{a}{x+2} + bx + 3$. On trouve $b = 3$ et $a = -2$, d'où :
   $F(x) = 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$, $]3, +\infty[$.
10. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.
    Ainsi : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$, sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
    N'oubliez pas de sortir la partie polynomiale de la fraction, obtenue en effectuant une division euclidienne.
11. On trouve, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$.
    Ainsi, $F(x) = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$ sur $]-\infty, -1[$, $]1, -1[$ ou $]1, +\infty[$.
12. Constatez que la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$. Ainsi, on a $-u' \cdot u$, d'où :
    $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}\right)^2 + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
    On peut le retrouver par un changement de variable $y = \frac{1}{x}$.
13. On a, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{1+x+x^2}$, puis :
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{sqrt3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}$$
    Donc $F(x) = \ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right) + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.

14. Après factorisation du dénominateur, et décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x+1)^2+1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x-1)^2+1}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$F(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)-\ln(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)+2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot x+1)+2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\cdot x-1)\Big)+C,$$

sur $\mathbb{R}$.

15. **Rappel : Si on note $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ une primitive de f (notation définie à une constante additive près), le changement de variable s'exprime par la formule**

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où la première primitive est exprimée avec la variable x, et la seconde avec la variable t. Les nouvelles expressions des bornes partent pour la borne inférieure dans la constante (on base simplement la primitive en un autre point), ou dans la réexpression de t en fonction de x, effectuée en fin de calcul.

La fonction est définie sur $]-1,1]$. Ici, on pose $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. On a alors

$$x=\frac{1+y^2}{1-y^2}=\varphi(y)\qquad\text{donc:}\qquad \mathrm{d}x=\frac{4y}{(1-y^2)^2}$$

puis, φ étant $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1]$,

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=\int\frac{4y^2}{(1-y^2)^2}\ \mathrm{d}y.$$

Second rappel : l'intégration par partie s'exprime sur les primitives sous la forme :

$$\int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x),$$

le seconde terme de la variation de uv partant dans le constante d'intégration

Ainsi, en posant

$$\forall y,\quad u(y)=2y\qquad\text{et}\qquad v(y)=\frac{1}{1-y^2},$$

de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=\frac{2y}{1-y^2}-\int\frac{2}{1-y^2}=\frac{2y}{1-y^2}+\ln|1-y|-\ln|1+y|.$$

On trouve alors les primitives de f en remplaçant y par $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ dans cette expression, et en ajoutant une constante quelconque.

16. On fait une IPP, sur le même principe que dans la question précédente :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}=-\frac{1+\ln x}{x}+C,$$

sur $]0,+\infty[$.

17. On a :

$$f(x)=\sin x\cos^2x(1-\cos^2x)=\sin x\cos^2x-\sin x\cos^4x.$$

Donc

$$F(x)=\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C,\ \text{sur }\mathbb{R}.$$

18. $f(x) = \sin^4 x - \sin^6 x$. On linéarise :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^4 x = \frac{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^4}{(2\,\mathrm{i})^4} = \frac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6),$$

en développant la puissance quatrième à l'aide de la formule du binôme de Newton. De même

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^6 x = -\frac{1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{16} - \frac{\cos 2x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{32},$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{t}{16} - \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} + C$$

Correction de l'exercice 3 –

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $\forall x \in]k\pi, (k+1)\pi[,\ f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \cos x \sin x$, d'où :

$$\forall x \in]k\pi, (k+1)\pi[, \quad F(x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

2. En effectuant un changement de variables $u = \cos x$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)\ \mathrm{d}u.$$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x - \sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x + \sqrt{2}|,$$

sur $]-\infty, -\sqrt{2}[$, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ ou $]\sqrt{2}, +\infty[$.

3. Un changement de variables $y = \cos x$ donne :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{(1-y^2)^2(1+y^2)}$$

Et là, bonjour les calculs.
Soit on fait une décomposition en éléments simples de la fraction, donc de la forme

$$\frac{1}{1-y^2)^2(1+y^2)} = \frac{a}{(1-y)^2} + \frac{b}{1-y} + \frac{c}{(1+y)^2} + \frac{d}{1+y} + \frac{ey+g}{1+y^2},$$

Soit on ruse, en décomposant d'abord la fraction en $z = y^2$, donc de la forme :

$$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{a}{(1-z)^2} + \frac{b}{(1-z)} + \frac{c}{1+z}.$$

Après mise sur le même dénominateur et identification, on trouve :

$$\frac{1}{(1-y^2)^2(1+y^2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-y^2)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

On a :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} = \int \frac{1-y^2+y^2}{(1-y^2)^2} = \int \frac{1}{(1-y^2)} + \int \frac{y^2}{(1-y^2)^2},$$

et en effectuant une IPP dans ce dernier terme :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} = \int \frac{1}{(1-y^2)} + \frac{y}{2(1-y^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-y^2)} + \frac{y}{2(1-y^2)}$$

Or : $\displaystyle\int \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \left(frac11-y + \frac{1}{1+y}\right)\ \mathrm{d}y$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{1-y^2} + \frac{1}{6}\ln|1-y| - \frac{1}{6}\ln|1+y| - \frac{1}{3}\operatorname{Arctan} y + C \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{6}\ln(1+\cos x) - \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\cos x + C \end{aligned}$$

sur tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Changement de variable $t = \tan x$:
$$\int f(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta \tan^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\alpha + \beta t^2} \, \mathrm{d}t$$
   - Si $\alpha = \beta = 0$, ce n'est pas défini ;
   - Si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $F(x) = -\dfrac{1}{\beta \tan x} + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $F(x) = \dfrac{\tan x}{\alpha} + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} \tan x\right) + C$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha\beta < 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|\alpha\beta|}} \left(\ln\left|1 + \sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|} \tan x\right| - \ln\left|1 - \sqrt{\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|} \tan x\right|\right) + C.$

   (défini sur $\mathbb{R}$)
5. On traite les deux dernières questions conjointement en notant F une primitive de 5, G une primitive de 6. Alors :
$$F(x) + G(x) = \int 1 \, \mathrm{d}x = x + C_1$$
   et
$$G(x) - F(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x + \cos x| + C_2.$$
   Ainsi, en résolvant le système obtenu :
$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} + C_3, \qquad \text{et} \qquad G(x) = -\frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{x}{2} + C_4,$$
   sur tout intervalle $]k\pi - \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}[$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Voir question précédente.

Correction de l'exercice 4 –

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{2\ln^2 3}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan x \, \mathrm{d}x = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2.$
3. C'est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u = \ln \circ \ln$. Ainsi :
$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln \ln t)} = \Big[\ln|\ln \ln x|\Big]_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{x} = \ln|\ln \ln x|,$$
   pour $x \in]1, +\infty[\setminus\{\mathrm{e}\}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2 x - 1 \, \mathrm{d}x = \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$
5. IPP avec $u(x) = \ln^2 x$, $v'(x) = 1$:
$$\int_1^2 \ln^2 x \, \mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - 2\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x,$$
   et re-IPP :
$$\int_1^2 \ln^2 x \, \mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 2\int_1^2 1 \, \mathrm{d}x = 2(\ln^2 2 - \ln 2 + 1).$$
6. Quatre IPP successives, pour diminuer petit à petit le degré de x^4 :
$$\int_0^1 x^4 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 1 - 4\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = -3 + 12\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 9 - 24\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = -15 + 24\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 24\mathrm{e} - 39.$$
7. Deux IPP successives, en dérivant à chaque fois la fonction trigonométrique (calcul classique) :
$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi} + 1)$

8. Une IPP en dérivant x :
$$\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = \Big[x\tan x\Big]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x\ \mathrm{d}x = \sqrt{3} + \ln\frac{1}{2} = \sqrt{3} - \ln 2.$$
9. Rebelotte.
$$\int_0^{\pi/3} x\tan^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} x(\tan^2 x + 1)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{18} = \sqrt{3} - \frac{\pi^2}{18} + \ln 2,$$
par IPP en intégrant $1 + \tan^2 x$.
10. Cdv $x = y^6$:
$$\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{6y^5\ \mathrm{d}y}{y^3 + y^2} = 6\int_1^2 \left(y^2 - y + 1 - \frac{1}{1+y}\right)\ \mathrm{d}y,$$
par une division euclidienne. Ainsi,
$$\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\left(\frac{7}{3} - 1 + 1 - \ln 3 + \ln 2\right) = 14 - 6\ln 3 + 6\ln 2.$$
11. cdv $x = \sin t$, pour faire partir la racine avec les propriétés du sin et du cos :
$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^3 t\ \mathrm{d}t$$
puis linéarisation :
$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \cos^4 t = \frac{1}{16}\left(2\cos 4t + 8\cos 2t + 6\right),$$
donc
$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16}.$$
12. Fastoche !
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + \ln^2 x)} = \Big[\mathrm{Arctan}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{4}.$$
13. On pose $y = \sqrt{x+1}$, soit $x = y^2 - 1$. Alors
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} 2(y^2 - 1)\ \mathrm{d}y = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1)^2 - 2(\sqrt{2} - 1).$$
14. cdv $y = x^n$:
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n + 3)} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{n-1}\ \mathrm{d}x}{x^n(x^n + 3)}\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2^n}}^1 \frac{\mathrm{d}y}{y(y+3)}$$
$$= \frac{1}{3}\ln(2^n) - \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)\right) = \frac{n-2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$$
15. On fait une DES (décomposition en éléments simples) en 2 étapes, en commençant par une DES de la fraction en la variable $y = x^2$. Ainsi :
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - 1} = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + 1}\right)\ \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x$$
On trouve alors :
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\, 3 - \mathrm{Arctan}\, 2).$$
16. On obtient l'expression suivante (voir Exo 5, n° 14), après DES, découpage des fractions obtenues, et mise sous forme canonique :
$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x + 1)^2 + 1}\ \mathrm{d}x$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\cdot x - 1)^2 + 1}\ \mathrm{d}x$$
puis
$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2} + 1) - \mathrm{Arctan}(\sqrt{2} - 1)\right).$$

Correction de l'exercice 7 –

1. Diverge (cdv, puis minorer l'intégrale sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$)
2. Converge (cdv puis IPP)
3. Diverge (équivalent à une série de Bertrand)
4. Converge (faire un DL à l'ordre 2 en la variable $\frac{\ln x}{x}$)
5. Converge (majoration pour x assez grand)
6. Converge
7. Diverge (équivalent)
8. Converge ($x^2 f(x)$)
9. Converge ($x^2 f(x)$)
10. Diverge ($x f(x)$)
11. Diverge (minoration)
12. Converge ssi $3a - 2b > -1$ (montrer que $\operatorname{Arctan} t(1+t) > t$, puis équivalents)
13. Diverge (minorer l'intégrale sur $[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi]$ par le terme général d'une série divergente)
14. Diverge (même principe, sur l'intervalle $[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}]$.)
15. Converge ($\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3 \sin^2 x} \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$)
16. Converge (cdv)
17. Converge (DL pour se ramener à une intégrale de Dirichlet et un o qui assure la convergence absolue)
18. Converge (cdv)
19. Diverge (DL)
20. Converge (équivalents)
21. Converge ($x^2 f(x)$)
22. Converge (cdv $y = -\ln x$)
23. Converge ssi $a \in 2\mathbb{N}^*$ (séparer $a > 0$ et $a \leqslant 0$, puis étudier l'existence d'une racine du dénominateur, suivant la parité de a)
24. Converge (en 0, cdv $y = \frac{1}{x}$, en $+\infty$, formules de trigonométrie)

Correction de l'exercice 8 –

1. $I_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$ (DES directement, ou plus astucieux : cdv $y = x^2$)
2. $I_2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ (DES)
3. $I_3 = \frac{\pi}{12}$ (cdv)
4. $I_4 = \frac{\pi}{2}$ (mise sous forme canonique du dénominateur)
5. $I_5 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (cdv $x = \sin t$ puis $u = \tan t$)
6. $I_6 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (cdv $y = \sqrt{x}$)
7. $I_7 = 2\ln(\sqrt{2} + 1)$ (cdv $y = \sqrt{e^x + 1}$)
8. $I_8 = 2\pi$ (IPP puis cdv)
9. $I_9 = 0$ (IPP ou cdv $y = \frac{1}{x}$, au choix)
10. $I_{10} = -4(1 - \ln 2)$ (cdv puis IPP)
11. $I_{11} = -2\ln 2$ (IPP)
12. $I_{12} = -\frac{\pi}{2} - \ln 2$ (IPP)
13. $I_{13} = \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right)$ (cdv $y = \mathrm{ch} x$, après avoir multiplié numérateur et dénominateur par $\mathrm{sh}(x)$)
14. $I_{14} = \pi$ (cdv $y = \mathrm{sh} x$)
15. $I_{15} = \frac{1}{2}$ (écrire sous forme d'une fraction en e^x puis primitiver directement)
16. $I_{16} = \ln(\sqrt{2} + 1)$ (cdv $y = x^2$ puis $z = \sqrt{1 + y}$.)

Correction de l'exercice 11 – La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale admet donc deux impropretés en $-\infty$ et $+\infty$.
Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x$. Alors u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) \frac{\mathrm{e}^x}{1 + (\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1}{e^{-x} + e^x}.$$

Ainsi, $f = u \cdot u'$. Une primitive de f est donc $F = \frac{1}{2} u^2$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}^2 \mathrm{e}^x.$$

Par composition des limites, F admet une limite égale à $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ en $+\infty$, et une limite égale à $-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ en $-\infty$. Ainsi, l'intégrale est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 12 –

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^4 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. La fonction f est continue sur $]0, 1[$, donc admet uniquement deux impropretés, aux bornes 0 et 1.
   La fonction f admet une limite nulle en 0, donc l''intégrale est faussement impropre en 0, donc convergente. De plus, f est équivalente en 1 à $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, dont l''intégrale est convergente en 1 (intégrale de Riemann). La fonction f étaznt positive, on en déduit qu'elle est aussi convergente pour la borne 1
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$ converge.
   Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x - x^2} = \sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x-1)^2}.$$

   Ainsi, en effectuant le changement de variables $y = 2x - 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, strictement croissant et bijectif de $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^4 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{(y+1)^4 \, \mathrm{d}y}{16\sqrt{1-y^2}}.$$

   Posons maintenant $y = \sin t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, strictement croissante, et bijective de $[-\pi, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On a $\mathrm{d}y = \cos t \, \mathrm{d}t$, d'où

$$\int_0^1 \frac{x^4 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sin t + 1)^4 \cos t \, \mathrm{d}t}{16\sqrt{1 - \sin^2 t}},$$

   et comme le cosinus est positif sur l'intervalle considéré :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} &= \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t + 1)^4 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 4\sin t + 6\sin^2 t + 4\sin^3 t + \sin^4 t\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 6\sin^2 t + \sin^4 t\right) \, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

   par imparité des fonctions sin et $\sin^3$. Or, en linéarisant $\sin^4 t$:

$$\sin^4 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2\,\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{1}{8} \cos(4t) - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{3}{8},$$

   et

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Or, pour tout $k \neq 0$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k}(\sin(\pi k) - \sin(-\pi k)) = 0.$$
Ainsi,
$$\int_0^1 \frac{x^4\ \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{16}\int_{-\pi}^{\pi} 4 + \frac{3}{8}\ \mathrm{d}t = \frac{35\pi}{64}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{3-x}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc il y a une seule impropreté en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, $x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$ tend vers $+\infty$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{3-x}$ tend vers 0, donc $\mathrm{e}^{3-x} = o(\mathrm{e}^{x+1})$, et on obtient donc :
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$
Ces fonctions sont positives sur $[1, +\infty[$, donc $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$, qui est convergente, puisque à réduction près de l'intervalle d'intégration, il s'agit de $\Gamma(1)$.
Pour calculer I, on effectue le changement de variables $y = \mathrm{e}^x$, strictement croissant, bijectif de $[1, +\infty[$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. De plus, $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$ On obtient donc (la convergence étant déjà prouvée) :
$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^3} = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}y^2 + \mathrm{e}^3} \\ &= \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{\mathrm{e}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{\mathrm{e}}\right)\right]_{\mathrm{e}}^{\lim_{+\infty}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 – La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln^3 x}{x^{\frac{2}{5}}|1-x|^{\frac{4}{5}} \operatorname{Arctan}\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, comme composées et produits de fonctions continues sur leur domaine. Ainsi, l'intégrale I est impropre en 0, en 1 et en $+\infty$.

- Étude de la convergence en la borne 0

  On a, au voisinage de 0, $\operatorname{Arctan} y \underset{0}{\sim} y$, donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln^3 x}{x^{\frac{2}{5}}\sqrt{x}} = \dfrac{\ln^3 x}{x^{\frac{9}{10}}}$.

  De plus, d'après les croissances comparées, au voisinage de 0, $|\ln x| = o\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{60}}}\right)$, donc $|\ln^3 x| = o\left(x^{\frac{1}{20}}\right)$

  On obtient donc, au voisinage de 0 :
  $$\frac{\ln^3 x}{x^{\frac{9}{10}}} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{9}{10}} x^{\frac{1}{20}}}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\frac{19}{20}}}\right) \qquad \text{donc:} \qquad |f(x)| = o\left(\frac{1}{x^{\frac{19}{20}}}\right).$$
  Puisque $\frac{19}{20} < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{19}{20}}}$ converge, donc, les fonctions étant positive, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\ \mathrm{d}x$, par critère de comparaison par négligeabilité. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge.
- Étude de la convergence en la borne 1.

  Puisque $lnx \underset{1}{\sim} x - 1$, $f(x) \underset{1}{\sim} (x-1)|x-1|^{\frac{6}{5}} \cdot \dfrac{4}{\pi}$, et f tend donc vers 0 en 1. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 (à gauche et à droite). Ainsi, I est faussement impropre en 1 (à gauche et à droite), donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$ convergent.
- Étude de la convergence en la borne $+\infty$.

  Puisque Arctan admet une limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, on a l'équivalent suivant :
  $$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^3 x}{x^{\frac{6}{5}}}.$$

D'après les croissances comparées, au voisinage de $+\infty$, $\ln^3 x = o\left(x^{\frac{1}{10}}\right)$, et donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}\right)$.

Comme $\frac{11}{10} > 1$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{11}{12}}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison par négligeabilité, les fonctions étant positives sur l'intervalle $[2, +\infty[$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, l'intégrale I est convergente.

Correction de l'exercice 14 – Attention à ne pas aller trop vite, et à ne pas utiliser directement un équivalent ou une inégalité, car l'intégrande n'est pas de signe constant ici.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, il n'y a donc qu'une impropreté en $+\infty$.
On a, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\cos x}{x}} - 1\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{8}\frac{\cos^2 x}{x^2} + o\left(\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, en $+\infty$. Ainsi, les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ converge.
D'après le théorème de comparaison par o, il en résulte que la nature de l'intégrale de f est la même que la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
On fait une IPP, en posant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$:

$$\forall x \in [0, +infty[, \quad u(x) = \sin x, \qquad u'(x) = \cos x, \qquad v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad v'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

La limite de uv étant nulle en $+\infty$, l'intégrale de f a la même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$, qui est absolument convergente, puisque

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$ converge.

Correction de l'exercice 15 –

1. $\sin x\ \cos 2x = x - \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^4)$
2. $\mathrm{e}^{\sin 2x} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - \dfrac{32}{15}x^5 + o(x^5)$
3. $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4)$.
4. Attention, pensez à sortir un facteur e, pour vous ramener à une composition par une expression **de limite nulle**.
   $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}\cdot x^2 + \dfrac{\mathrm{e}}{6}\cdot x^4 + o(x^4)$.
5. De même, mettez 2 en facteur dans la racine.
   $\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{384}x^4\right) + o(x^5)$
6. $\sin^3 x \underset{+\infty}{\sim} x^3$, ainsi, pour obtenir l'ordre 5, comme on doit diviser par x^3, il va falloir aller à l'ordre 8 pour $\sin^3$, et comme chaque DL du sin est multiplié au moins par x^2 (un terme x provenant de chacun des deux autres sinus), il suffit d'aller à l'ordre 6 pour le sinus. On a alors

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13}{120}x^4 + o(x^5),$$

puis, en inversant :

$$\frac{x^3}{\sin^3 x} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + o(x^5).$$

7. $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}$, pour se ramener à l'inverse d'une expression de limite 1, afin d'utilise $\frac{1}{1-u}$. Ainsi, comme on divise tout globalement par x, il faudra le DL de $\frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 6, donc le DL de sin à l'ordre 7.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6),$$

puis, en inversant :

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + o(x^6)$$

et enfin,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + o(x^5).$$

8. $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{61}{720}x^6 + o(x^6)$

9. Utiliser la π-périodicité de tan pour se ramener en 0, et puis un peu de calcul...

$$\tan(\pi e^x) = \pi x + \frac{\pi}{2}x^2 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi^3}{2}\right)x^4 + o(x^4).$$

10. $(1 - x\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1-x\sin x)}$, puis :
$\dfrac{1}{x}\ln(1 - x\sin x) = -x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{40}x^5 + o(x^5)$, puis :
$(1 - x\sin x)^{\frac{1}{x}} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{8}x^4 - \dfrac{7}{20}x^5 + o(x^5)$.

11. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}}\ln(\cos x)$
Comme on divise par x^2, on doit prendre l'ordre 5 pour $\ln(\cos x)$. Ainsi :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5),$$

puis :

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right).$$

12. N'oubliez pas de mettre 4 en facteur, pour vous ramener à $\sqrt{1+u}$, où u est **de limite nulle**. Ensuite, n'oubliez pas de sortir un facteur e^2 de même. Ainsi, on a les étapes suivantes :
   - $\sqrt{1 + \dfrac{x}{4}} = 1 + \dfrac{x}{2^3} - \dfrac{x^2}{2^6} + \dfrac{x^3}{2^{10}} + o(x^3)$
   - $\sqrt{4+x} = 2 + \dfrac{x}{2^2} - \dfrac{x^2}{2^7} + \dfrac{x^3}{2^9} + o(x^3)$
   - $e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left(1 + \dfrac{x}{2^2} + \dfrac{x^2}{2^6} + \dfrac{x^3}{3\cdot 2^9} + o(x^3)\right) = e^2\left(1 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{x^3}{1536} + o(x^3)\right)$

13. Du calcul ! Les étapes (tout est au voisinage de 0) :
   - $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{2^3} + \dfrac{u^3}{2^4} - \dfrac{5u^4}{2^7} + \dfrac{7u^5}{2^8} - \dfrac{21u^6}{2^{10}} + o(u^6)$
   - $\sqrt{1 - x - x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{8}x^2 - \dfrac{3}{16}x^3 - \dfrac{45}{128}x^4 - \dfrac{95}{256}x^5 - \dfrac{465}{1024}x^6 + o(x^6)$.
   - Comme $\cos x - 1$ est de valuation 2, il suffit d'aller à l'ordre 3 (heureusement) pour $(1+u)^{\frac{1}{3}}$:
     $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}u - \dfrac{1}{9}u^2 + 581u^3 + o(u^3)$
   - $(\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{72} - \dfrac{43}{6480}x^6 + o(x^6)$
   - $\sqrt{1 + x - x^2} - (\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{19}{24}x^2 - \dfrac{3}{16}x^3 - \dfrac{421}{1152}x^4 - \dfrac{95}{256}x^5 - \dfrac{1315523}{2903040}x^6 + o(x^6)$.
     À vos souhaits.

14. Tout d'abord, puisque $\tan x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on va pourvoir composer le DL de $\frac{1+u}{1-u}$ par celui de la tangente. On obtient donc les étapes suivantes :

- $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{2}{15}x^6 + o(x^7)$.
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{31}{315}x^7 + o(x^7)$
- $\dfrac{1+u}{1-u} = 1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + 2u^4 + 2u^5 + 2u^6 + 2u^7 + o(u^7)$
- $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + \dfrac{10}{3}x^4 + \dfrac{64}{15}x^5 + \dfrac{184}{45}x^6 + \dfrac{1753}{315}x^7 + o(x^7)$
- Et enfin : $\ln \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = 2x + \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{44}{15}x^5 - \dfrac{4}{3}x^6 - \dfrac{1595}{63}x^7 + o(x^7)$,
  si je ne me suis pas trompé (les calculs m'ont tout de même pris 45 minutes).

15. On a $\sin x - \sin 5x = -4x + o(x)$, donc en divisant par x, on est ramené à une forme $\frac{1}{1-u}$. Ainsi, on peut écrire :
$$\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = \frac{1}{x}(\cos x - \cos 5x) \cdot \frac{x}{\sin x - \sin 5x}.$$
Il faut donc aller jusqu'à l'ordre 6, avant de diviser par x. La fraction en sinus donne une terme constant non nul, donc si faudra bien aller à l'ordre 6 pour les cosinus. En revanche, les termes constant des cosinus se compensent, et le premier terme non nul dans la différence des cosinus est un terme en x^2. Ainsi, il suffira d'aller à l'ordre 4 pour la fraction des sinus. Comme on divise la différence des sinus par x, il faut aller à l'ordre 5 pour les sinus. On obtient :
    - $\dfrac{\sin x - \sin 5x}{x} = -4\left(1 - \dfrac{31}{6}x^2 + \dfrac{781}{120}x^4 + o(x^4)\right)$
    - $ds\frac{x}{\sin x - \sin 5x} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{31}{6}x^2 + \frac{7267}{360}x^4 + o(x^4)\right)$
    - $\cos x - \cos 5x = 12x^2 - 26x^4 + \dfrac{217}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $(\cos x - \cos 5x) \cdot \dfrac{x}{\sin x - \sin 5x} = -3x^2 - 9x^4 - \dfrac{519}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = -3x - 9x^3 - \dfrac{519}{10}x^5 + o(x^5)$.
16.
    - $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{x^3}{2^4} + o(x^3)$.
    - $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{x}{2^3} - \dfrac{5}{2^7}x^2 + \dfrac{21}{2^{10}}x^3 + o(x^3)\right)$
    - $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2^4}x - \dfrac{13-12\sqrt{2}}{2^8}x^2 + \dfrac{124-69\sqrt{2}}{2^{12}}x^3 + o(x^3)\right)$

Correction de l'exercice 16 –

1. On pose $y = x - 1$, y tend vers 0 quand x tend vers 1, et :
$$\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}} - (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}^{1+y} - (1+y)^{\mathrm{e}} - (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}(1+y+\frac{y^2}{2}) - (1+\mathrm{e}y+\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{2}y^2) - (\mathrm{e}-1) + o(y^2) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}\cdot y^2 + o(y^2).$$
Donc $\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}} - (\mathrm{e}-1) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}(x-1)^2$.
2. On pose $y = x - \mathrm{e}$. Au voisinage de 0 pour y :
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}} &= \mathrm{e}^{y+\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+y)^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)) - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(1+\frac{y}{\mathrm{e}})^{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}}(1+y+\frac{y^2}{2} - 1 - \mathrm{e}\cdot\frac{y}{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{2}\cdot\frac{y^2}{\mathrm{e}^2}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\frac{y^2}{2\mathrm{e}}.\end{aligned}$$
Donc $\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}} \underset{x\to\mathrm{e}}{\sim} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}(x-\mathrm{e})^2$.
3. $\sqrt{x} - \sqrt{\sin x} = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}\right) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}\cdot\dfrac{x^2}{12} = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{12}$
4. $x^x - \sin x^{\sin x} = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(1 - \mathrm{e}^{\sin x \ln \sin x - x\ln x}\right) \underset{0^+}{\sim} \mathrm{e}^{x\ln x}(x\ln x - \sin x \ln x)$,
car $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x - \sin x\ln x) = 0$. De plus :
$$\ln(\sin x) = \ln(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \ln x + \ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

et donc :

$$\begin{aligned}\sin x\ln(\sin x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(\ln x-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\\ &= x\ln x-\frac{x^3\ln x}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^3\ln x)\\ &= x\ln x-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x),\end{aligned}$$

car $x^3=o(x^3\ln x)$ au voisinage de 0. Donc

$$x\ln x-\sin x\ln x\underset{0^+}{\sim}\frac{x^3\ln x}{6}\qquad\text{puis:}\qquad x^x-\sin x^{\sin x}\underset{0^+}{\sim}x^x\cdot\frac{x^3\ln x}{6}=\frac{x^{3+x}\ln x}{6}.$$

5. On a :

$$(\tan x)^x-x^{\tan x}=\mathrm{e}^{x\ln\tan x}-\mathrm{e}^{\tan x\ln x}=\mathrm{e}^{\tan x\ln x}(\mathrm{e}^{x\ln\tan x-\tan x\ln x}-1).$$

Or, $\tan x\ln x\underset{0}{\sim}x\ln x$ et est donc de limite nulle. De même, $x\ln\tan x-\tan x\ln x$ est de limite nulle. On obtient donc :

$$(\tan x)^x-x^{\tan x}\underset{0}{\sim}x\ln\tan x-\tan x\ln x.$$

Or,

$$\begin{aligned}x\ln(\tan x)-\tan x\ln x &= x\ln(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))-(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))\ln x\\ &= x\ln x+x\ln\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)-x\ln x-\frac{x^3}{3}\ln x+o(x^3\ln x)\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^3\ln x}{3}+o(x^3)+o(x^3\ln x)=-\frac{x^3\ln x}{3}+o(x^3\ln x),\end{aligned}$$

car $x^3=o(x^3\ln x)$, puisque $\ln x$ tend vers $-\infty$ en 0. Ainsi,

$$(\tan x)^x-x^{\tan x}\underset{0}{\sim}-\frac{x^3\ln x}{3}$$

On fait de même pour le numérateur. On rappelle (ou définit) que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}.$$

Ainsi, on trouve :

$$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad \mathrm{ch}x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3),\qquad \mathrm{th}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

À quelques signes près, le calcul s'opère de la même façon, et on trouve :

$$(\mathrm{th}x)^x-x^{\mathrm{th}x}\underset{0}{\sim}\frac{x^3\ln x}{3},$$

donc

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\tan x)^x-x^{\tan x}}{(\mathrm{th}x)^x-x^{\mathrm{th}x}}=-1.$$

C'est aussi l'équivalent.

6. Voir la question précédente pour la définition de sh (sinus hyperbolique) Quelques essais montrent qu'il faut aller jusqu'à l'ordre 7. En utilisant la définition du sh, on obtient :

$$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+o(x^7)$$

Vous remarquez que c'est le même développement que $\sin x$, à part que tous les signes sont positifs. C'est pareil pour $\mathrm{ch}x$ et $\cos x$ d'ailleurs. On trouve alors :

$$\mathrm{sh}(\sin x)=x-\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{90}+o(x^7)\qquad\text{et}\qquad\sin(\mathrm{sh}(x))=x-\frac{x^5}{15}-\frac{x^7}{90}+o(x^7).$$

Ainsi, $\mathrm{sh}(\sin x)-\sin(\mathrm{sh}x)=\dfrac{x^7}{45}+o(x^7)$, et donc $\mathrm{sh}(\sin x)-\sin(\mathrm{sh}x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^7}{45}$.

7. Sans difficulté. On a $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$. À savoir ! Et si vous l'avez oublié, comme $\operatorname{Arctan} x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on obtient, en utilisant l'équivalent de tan en 0 :

$$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} \tan(\operatorname{Arctan} x) = x.$$

Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to 0} x - x\cos x = 0$,

$$\operatorname{Arctan}(x - x\cos x) \underset{0}{\sim} x - x\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$$

Même pas besoin de DL ici.

8. Là encore, on est ramené à un équivalent classique de l'Arctan, mais en $+\infty$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = +\infty$. Cet équivalent n'est pas nécessairement à connaître par coeur, mais il faut savoir le retrouver, par une méthode similaire à celle utilisée dans la question précédente. On a :

$$\lim_{y\to+\infty} \operatorname{Arctan} y - \frac{\pi}{2} = 0,$$

donc, en utilisant l'équivalent classique en 0 de la tangente :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y \underset{+\infty}{\sim} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y\right) = \frac{1}{\tan(\operatorname{Arctan} y)} = \frac{1}{y}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{\pi}{2} \underset{0}{\sim} -\sqrt{\frac{x}{1-x}} \underset{0}{\sim} -\sqrt{x}.$$

Correction de l'exercice 17 –

1. Au voisinage de 0, on a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$$

donc, cette expression tendant vers 0 en 0 :

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^6 + o(x^6)\\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60}\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^6\right) - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(\sin x)} &= 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6\right)^3 + o(x^6)\\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{24}x^6 + \frac{1}{8}x^6 + o(x^6)\\
&= \boxed{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{23}{720}x^6 + o(x^6) = \frac{1}{\cos(\sin x)}}
\end{aligned}$$

2. Tout d'abord, constatons que $\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\ln(\cos^2 x)$, ce qui nous simplifiera les calculs...
Au voisinage de 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)^2 + o(x^6)\\
&= 1 + \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)\\
&= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\ln(\cos^2 x) &= \left(-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6\right)^3+o(x^6)\\
&= -x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6-\frac{1}{2}\left(x^4-\frac{2}{3}x^6\right)-\frac{1}{3}x^6+o(x^6)\\
&= -x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{45}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient finalement, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6)}.$$

On obtient bien entendu la même chose si on calcule d'abord un DL de $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, et qu'on prend le logarithme seulement après, mais avec un peu plus de calculs.

3. On a, au voisinage de 0 :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \qquad \text{donc:} \qquad \frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3).$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x^2}+o(x^3),$$

et l'exposant de l'exponentielle tendant vers 0 lorsque x tend vers 0, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3)\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} &= (1+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^3+o(x^3)\\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)\\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{48}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}}{\sqrt{1+\sin x}} &= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{48}x^3\right)+o(x^3)\\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{48}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)+o(x^3),
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}}{\sqrt{1+\sin x}}=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{5}{24}x^2-\frac{7}{48}x^3\right)+o(x^3).}$$

4. Évidemment, pensez à écrire $\ln(\sqrt{3+x})=\dfrac{1}{2}\ln(3+x)=\dfrac{1}{2}\left(\ln 3+\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)\right)$. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{3+x}) &= \frac{\ln 3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^4\right)+o(x^4)\\
&= \frac{\ln 3}{2}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}x^2+\frac{1}{162}x^3-\frac{1}{648}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+x} &= 1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)x^3+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)x^4+o(x^4)\\
&= 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\ln(\sqrt{3+x}) - \sqrt[3]{1+x} = \frac{\ln 3}{2} - 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{77}{1944}x^4 + o(x^4)}$$

Correction de l'exercice 18 –

1. Au voisinage de 0, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{+\infty}{o}(x^5),$$

donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\cos x) &= \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{+\infty}{o}(x^5)\right)\\ &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + \underset{+\infty}{o}(x^5)\right)\\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{16} + o(x^5)\\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5)\\ &= \ln 2\left(1 - \frac{x^2}{4\ln 2} - \frac{x^4}{96\ln 2}\right) + o(x^5)\end{aligned}$$

On inverse cela, et on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+\cos x)} &= \frac{1}{\ln 2}\left(1 + \frac{x^2}{4\ln 2} + \frac{x^4}{96\ln 2} + \frac{x^4}{16\ln^2 2}\right) + o(x^5)\\ &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{x^2}{4\ln^2 2} + \left(\frac{1}{96\ln^2 2} + \frac{1}{16\ln^3 2}\right)x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

2. On a, au voisinage de 0 :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Pour calculer le DL de l'Arctan, on peut déterminer (c'est facile) celui de sa dérivée, puis intégrer. Mais l'intégration de DL n'est en fait pas au programme. On peut s'en sortir à l'aide de la formule de Taylor-Young, du fait que Arctan est de classe $\mathcal{C}^3$. Il faut pour cela déterminer les dérivées successives de Arctan en 0. Pour cela, on va en fait calculer les dérivées successives de sa dérivée définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

Or, en identifiant avec le DL obtenu pour cette fonction par la formule de Taylor-Young (par unicité du DL), on obtient :

$$\mathrm{Arctan}'(0) = 1, \qquad \mathrm{Arctan}''(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Arctan}^{(3)}(0) = 2!(-1) = -2.$$

Comme de plus, $\mathrm{Arctan}(0) = 0$, il vient, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

C'est la seule méthode que vous puissiez appliquer systématiquement pour intégrer un DL, à condition d'avoir les hypothèses de régularité nécessaires.

Pour l'arctangente, on peut utiliser une autre méthode, issue du fait qu'il s'agit de la réciproque de tan. Tout d'abord, étant de classe $\mathcal{C}^3$, Arctan admet un DL à l'ordre 3, d'après la formule de Taylor-Young. Comme $\mathrm{Arctan}\, x = 0$, il n'y a pas de terme constant. Notons donc ce DL :

$$\mathrm{Arctan}\, x = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3).$$

On a $\tan(\mathrm{Arctan}\, x) = x$, donc, en composant ce DL avec celui de la tangente :

$$ax + bx^2 + cx^3 + \frac{a^3}{3}x^3 + o(x^3) = x.$$

On identifie (unicité du DL), et on obtient :

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{a^3}{3} = -\frac{1}{3}.$$

On retrouve donc le DL : $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(\operatorname{Arctan} x) - \ln(\tan x) &= \ln \frac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x} = \ln \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
&= \ln\left(\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + o(x^2)\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2\right) \\
&\underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}x^2.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 –

1. Effectuons un changement de variables $y = x - \frac{1}{2}$, ainsi, y tend vers 0 lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$. On a donc au voisinage de $\frac{1}{2}$ pour x :

$$\begin{aligned}
f(x) = \cos(\pi x(1-x)) &= \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} + y\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \pi y^2\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi y^2) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi y^2) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + o(y^3) + \pi y^2 + o(y^3)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \pi y^2 + o(y^2)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

2. Une remarque : n'utilisez pas la formule pour la racine 5e ! Ici, le logarithme permet de nettement simplifier l'expression, puisque :

$$\ln \sqrt[5]{2 + \cos x} = \frac{1}{5}\ln(2 + \cos x)...$$

On a, au voisinage de 0 :

$$2 + \cos x = 3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 3\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}\right) + o(x^5),$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln(2 + \cos x) &= \ln 3 + \left(\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}\right)^2 + o(x^5)\right) \\
&= \ln 3 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{72} + o(x^5) = \ln 3 - \frac{x^2}{6} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln \sqrt[5]{2 + \cos x} = \frac{\ln 3}{5} - \frac{x^2}{30} + o(x^5).$$

3. On fait le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{3}$, ainsi, y est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(\sin x) &= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+y\right)\right) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos y + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin y\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)+\frac{1}{2}\left(y+o(y^2)\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{y}-\frac{y^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot y-\frac{y^2}{2}\right)^2+o(y^2)\\
&= \frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot y-\frac{2}{3}y^2+o(y^2)\\
&= \frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 20 – Nous avons, au voisinage de 0 :

$$1+\mathrm{e}^x = 2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Ainsi, d'après la formule donnant $\cos(a+b)$, il vient :

$$\cos(1+\mathrm{e}^x) = \cos(2)\cos\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\sin(2)\sin\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right).$$

Ainsi, les termes dans le sinus et le cosinus tendant vers 0, on obtient, par composition :

$$\begin{aligned}
\cos(1+\mathrm{e}^x) &= \cos(2)\left(1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^2\right)-\sin(2)\left(\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^3\right)+o(x^3)\\
&= \cos(2)-\sin(2)x-\frac{1}{2}(\cos(2)+\sin(2))x^2-\left(\frac{\cos(2)}{2}+\frac{\sin(2)}{6}-\frac{\sin(2)}{6}\right)x^3+o(x^3),
\end{aligned}$$

d'où enfin :

$$\boxed{\cos(1+\mathrm{e}^x) = \cos(2)-\sin(2)x-\frac{1}{2}(\cos(2)+\sin(2))x^2-\frac{\cos(2)}{2}x^3+o(x^3)}$$

Correction de l'exercice 21 – Nous avons, au voisinage de 0,

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^x = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{\pi}{24}x^3-\frac{\pi}{96}x^4+o(x^4).$$

Ainsi, en utilisant une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)+o(x^4)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)^4\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)^3\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}x^2+\frac{\pi^2}{64}x^4+\frac{\pi^2}{16}x^3\right)+\frac{1}{24}\cdot\frac{\pi^4}{256}x^4+\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}x^2+\frac{\pi}{24}x^3+\frac{\pi}{96}x^4\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi^3}{64}x^3+\frac{3\pi^3}{128}x^4\right)+o(x^4)\right)\\
&= 1+\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi^2}{32}\right)x^2+\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^3}{384}\right)x^3+\left(\frac{\pi}{96}-\frac{\pi^2}{128}-\frac{3\pi^3}{128}+\frac{\pi^4}{6144}\right)x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 – On a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} x$, donc admet un développement asymptotique (DA) de valuation -1.
Le DA à l'ordre 0, s'il existe, fournit l'équation de la tangente, et le DA à l'ordre 1 fournit, si le terme d'ordre 1 est non nul, la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
Pour aller jusqu'à l'ordre 1, il faut faire un DL à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{x\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$ (qu'on divisera ensuite par $\frac{1}{x}$), donc un DL à l'ordre 2 de $x\ln\left(1+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$, donc un DL à l'ordre 3 de $\ln\left(1+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ au voisinage de $+\infty$. Or,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}\right)^3 + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$x\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis

$$\frac{1}{x\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} = 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x^2}\right)^2 + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi,

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{6x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que la courbe de f présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x+1$, et qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) - (x+1)$ est du même signe que $-\dfrac{1}{6x}$, c'est-à-dire négatif. Ainsi, au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est sous son asymptote.