Analyse 5 – Fonctions de plusieurs variables : continuité, calcul différentiel

Correction de l'exercice 7 – Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geqslant y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x| \leqslant y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leqslant -y^2. \end{cases}$

1. Tout d'abord, remarquons que les redondances de définition de f ne donnent par de conflit. En effet :
   - si $x = y^2$, $y \neq 0$, f est défini à la fois par la première et la deuxième égalité, ce qui n'est pas gênant, car on vérifie facilement que dans ce cas, $\frac{2x}{y} = 2y$.
   - Si $x = -y^2$, $y \neq 0$, f est défini à la fois par la deuxième et la troisième égalité, ce qui n'est pas gênant, car on vérifie facilement que dans ce cas, $\frac{2x}{y} = -2y$.
   - Si $x = y = 0$, f est défini à la fois par la première et la troisième égalité, ce qui n'est pas gênant, car dans ce cas, $2y = -2y = 0$.
   - Dans tous les autres cas, (x, y) vérifie une et une seule des trois conditions.

   Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

   Les fonctions g et h définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :
   $$g(x, y) = y^2 - x \qquad \text{et} \qquad h(x, y) = y^2 + x$$
   sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynomiales. Ainsi, les ensembles suivants :
   - $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\} = g^{-1}(]-\infty, 0[)$;
   - $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y^2 < x < y^2\} = g^{-1}(]0, +\infty[) \cap h^{-1}(]0, +\infty[)$
   - $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y^2\} = h^{-1}(]-\infty, 0[)$

   sont trois sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^2$, en tant qu'images réciproques (ou intersection d'images réciproques) de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ par une fonction continue.

   On remarquera que l'hypothèse $y \neq 0$ est automatiquement vérifiée pour tout $(x, y) \in U_2$, car si $y = 0$, on ne peut pas avoir $|x| < y$.
   - Sur l'ouvert U_1, f coïncide avec la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto 2y$. Ainsi, U_1 étant ouvert, f est continue sur U_1.
   - Sur l'ouvert U_2, f coïncide avec la fonction $(x, y) \mapsto \frac{2x}{y}$, continue en tant que quotient de deux fonctions polynomiales (donc continues), le dénominateur ne s'annulant pas sur U_2. Ainsi, U_2 étant ouvert, f est continue sur U_2.
   - Sur l'ouvert U_3, f coïncide avec la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto -2y$. Ainsi, U_3 étant ouvert, f est continue sur U_3.

   Il reste à étudier la continuité de f à la jonction des trois domaines U_1, U_2 et U_3.
   - Soit (x_0, y_0) tel que $x_0 = y_0^2$, et $y_0 \neq 0$. Alors :
     $*$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x \geqslant y^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x \geqslant y^2}} 2y = 2y_0$

     $*$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ 0<x<y^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ 0<x<y^2}} \frac{2x}{y} = \frac{2x_0}{y_0} = \frac{2y_0^2}{y_0} = 2y_0$

     Ainsi :
     $$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x \geqslant y^2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ 0<x<y^2}} f(x, y)$$
     donc, les deux domaines $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y^2\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y^2\}$ formant une partition de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, qui est un voisinage de (x_0, y_0), on en déduit que f est continue en (x_0, y_0)
   - Même raisonnement si $x_0 = -y_0^2$
   - Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geqslant y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geqslant y^2}} 2y = 0$
* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\leqslant -y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\leqslant y^2}} -2y = 0$
* $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|<-y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|<y^2}} \frac{2x}{y} = 0$, car $\left|\frac{2x}{y}\right| < \frac{2y^2}{y} = 2y$, qui tend vers 0.

Ainsi :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geqslant y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\leqslant -y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|<y^2}} f(x,y)$$

donc, les trois domaines $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant y^2\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant -y^2\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<y^2\}$ formant une partition de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est continue en $(0,0)$.

Ainsi, f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $(A,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'il existe au moins un triplet

$$(x,x',y)\in]-\alpha,\alpha[\times]-a,a[\times]-\beta,\beta[$$

tel que $|f(x,y)-f(x',y)| > A|x-x'|$.

Soit $y\in]-\beta,\beta[$ non nul. Nous avons alors :

$$]-\alpha,\alpha[\cap]-y^2,y^2[=]-\min(\alpha,y^2),\min(\alpha,y^2)[.$$

Puisque $\alpha>0$ et $y^2>0$, cet ensemble est un intervalle ouvert non vide. Notons-le I. L'intervalle I contient 0, mais n'est pas égal à $\{0\}$ (sinon il ne serait pas ouvert). Ainsi $I\setminus\{0\}\neq\varnothing$. Alors, pour tout $(x,x')\in(I\setminus\{0\})^2$,

$$|f(x,y)-f(x',y)| = \left|\frac{2x}{y}-\frac{2x'}{y}\right| = \frac{2|x-x'|}{|y|}.$$

Il suffit donc de choisir initialement y (non nul)tel que $\frac{2}{|y|}>A$, donc $|y|<\frac{2}{A}$, ce qui est possible, puisque $]-\beta,\beta[\cap]-\frac{2}{A},\frac{2}{A}[$ est un intervalle ouvert contenant 0 (donc non vide et non restreint à $\{0\}$), et de choisir x et x' **distincts** dans $I\setminus\{0\}$, ce qui est possible aussi, car $I\setminus\{0\}$ étant ouvert et non vide, il contient au moins deux éléments distincts. Ce choix de y, puis de x et x' amène alors l'égalité

$$|f(x,y)-f(x',y)| > A|x-x'|.$$

Ayant trouvé des valeurs de x, x' et y convenables quel que soit le choix de $(A,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, on a bien montré qu'il n'existe aucun $(A,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall(x,x',y)\in]-\alpha,\alpha[\times]-a,a[\times]-\beta,\beta[,\quad |f(x,y)-f(x',y)|\leqslant A|x-x'|.$$

Correction de l'exercice 12 –

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et $z=x+\mathrm{i}\,y$. Alors :

$$\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\sin y).$$

Ainsi,

$$z\mathrm{e}^{-z} = (x+\mathrm{i}\,y)\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^{-x}(x\cos y + y\sin y) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-x}(y\cos y - x\sin y).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\sin y)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-x}(y\cos y-x\sin y)}.$$

La première exponentielle est réelle positive, et la deuxième de module 1 (car c'est l'exponentielle d'une quantité imaginaire pure). Ainsi

$$|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}| = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\sin y)},$$

et enfin :

$$f(x,y) = \ln|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}| = \mathrm{e}^{-x}(x\cos y + y\sin y).$$

La fonction f est obtenue comme produits et sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ en une variable (donc aussi de classe $\mathcal{C}^2$ vues comme fonctions en 2 variables, par composition avec la projection sur un facteur, qui est de classe $\mathcal{C}^2$). Ainsi, on peut calculer ses dérivées partielles. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-x}(x\cos y + y\sin y) + \mathrm{e}^{-x}(\cos y) = \mathrm{e}^{-x}((1-x)\cos y - y\sin y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\mathrm{e}^{-x}((1-x)\cos y - y\sin y) + \mathrm{e}^{-x}(-\cos y) = \mathrm{e}^{-x}((x-2)\cos y + y\sin y)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x}(-x\sin y + \sin y + y\cos y) = \mathrm{e}^{-x}((1-x)\sin y + y\cos y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{-x}((1-x)\cos y + \cos y - y\sin y) = \mathrm{e}^{-x}((2-x)\cos y - y\sin y)$.

Ainsi, $\Delta f = 0$, donc f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, harmonique sur U.
   - Puisque f est de classe $\mathcal{C}^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, d'après le théorème de Schwarz, appliqué d'abord à f puis à $\dfrac{\partial f}{\partial y}$,
   $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^3 f}{(\partial x)(\partial y)^2}.$$
   Ainsi,
   $$\Delta\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0,$$
   puisque f est harmonique.
   - Un raisonnement similaire, en inversant les rôles de x et y, montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.
   - Soit g définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :
   $$g(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$
   Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et
     * $\dfrac{\partial g}{\partial x} = y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
     * $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) - x\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$
     * De même, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -x\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) + y\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$

   Ainsi, d'après le théorème de Schwarz, il reste :
   $$\Delta g(x,y) = y\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) - x\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) - x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y),$$
   et, par de nouvelles utilisations du théorème de Schwarz, f étant de classe $\mathcal{C}^3$, on obtient :
   $$\Delta g(x,y) = y\Delta\frac{\partial f}{\partial x} - x\Delta\frac{\partial f}{\partial y},$$
   et d'après ce qui précède, $\Delta\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\Delta\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $\Delta g = 0$. Ainsi, g est harmonique.

   Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ car quotient et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On obtient alors, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x}{y^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$;

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Ainsi, on a bien, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\Delta f(x,y) = 0$, donc f est harmonique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{y}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 19 –

1. Tout d'abord, justifions l'existence des dérivées partielles secondes de f.
   - La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en tant que fonction polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de composition, la fonction composée $(x,y) \mapsto \sqrt{xy}$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   - De même, la fonction θ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x,y) \mapsto \theta(xy)$, égale à la composée de la fonction $(x,y) \mapsto xy$ et de la fonction θ, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   - De même pour $(x,y) \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, la fonction $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)$ en tant que quotient de deux fonctions polynomiales sur ce domaine, le dénominateur ne s'annulant pas.
   - Ainsi, la fonction f s'écrit comme produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, elle est donc elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.

   On peut donc calculer les dérivées partielles secondes de f : pour tout (x,y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\sqrt{xy}\cdot y}{x^2}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\theta'(xy) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\theta'(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{y}{x^2} \cdot \varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{3y^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{5}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{y}{x^2}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right) + y^2\theta''(xy)$,

     donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{2}}}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right) + y^2\theta''(xy)$
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\theta'(xy)$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{2y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^2\theta''(xy)$,

     donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^2\theta''(xy)$

   Un calcul sans difficulté amène alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
   $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et les fonctions $(u,v) \mapsto \frac{u}{v}$ et $(u,v) \mapsto \sqrt{uv}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, en tant que quotient de fonctions polynomiales, ou en tant que composée d'une fonction polynomiale et de la fonction racine, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, g est obtenue comme composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$.

   De plus, les règles de dérivation de fonctions composées amènent, pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
   - $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \left\langle \nabla f\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right), \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$.
   - puis :
   $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right),\end{aligned}$$

   d'après le théorème de Schwarz, f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Ainsi, pour tout (u,v) dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{u}{2v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{u}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &= \frac{u}{2v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{u}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right).\end{aligned}$$

Or, f vérifie l'équation (1), donc en posant $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ et $y = \sqrt{uv}$, qui sont bien dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il vient :

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - uv\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) = 0,$$

soit, en divisant par $2v > 0$,

$$\frac{u}{2v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{u}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) = 0.$$

Ainsi, en comparant à l'expression obtenue pour $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$, on peut conclure :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

3. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) + \frac{a}{t}h(t) = 0 \qquad (3)$$

(a) Soit $h_0 : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \ln t}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors h_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que composée de fonctions exponentielles et logarithmiques, de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

- si $a \neq 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_0'(t) = -at^{-a-1} = -\frac{a}{t}\cdot\frac{1}{t^a} = -\frac{a}{t}h_0(t),$$

- si $a = 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_0'(t) = 0 = -\frac{a}{t}h_0(t).$$

Dans tous les cas, h_0 est solution de l'équation différentielle (3).

(b) Soit h une solution de (3), et k définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $k : t \mapsto t^a h(t)$. Alors, k est de classe $\mathcal{C}^1$ sir $\mathbb{R}_+^*$ en tant quie produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et, si $a \neq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(t) = at^{a-1}h(t) + t^a h'(t) = t^a(\frac{a}{t}h(t) + h'(t)) = 0,$$

d'après l'équation satisfaite par h. Si $a = 0$, on obtient directement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(t) = h'(t) = 0.$$

Ainsi, dans tous les cas, k' est nulle sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_+^*$, donc k est une fonction constante (attention, cette propriété est vraie car on est sur un intervalle).

(c) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation (3). Ainsi :

- d'après 3(a), $h_0 \in \mathcal{S}$, et par linéarité de la dérivation, il en découle immédiatement que $\mathrm{Vect}(h_0) \subset \mathcal{S}$;
- d'après 3(b), si $h \in \mathcal{S}$, $t \mapsto t^a h(t)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$, disons de valeur $C \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^a h(t) = C \qquad \text{donc:} \qquad h(t) = \frac{C}{t^a} = Ch_0(t).$$

Ainsi, $h \in \mathrm{Vect}(h_0)$, d'où l'inclusion $\mathcal{S} \subset \mathrm{Vect}(h_0)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(h_0)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $t \mapsto \frac{C}{t^a}$, $C \in \mathbb{R}$, définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, solution de l'équation (1). Considérons la fonction g définie à partir de f comme dans la question 2. D'après la question 2, on a,pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

Alors, à v fixé, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ vérifie (pour la dérivation par rapport à u) la relation (3), avec $a = -\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe une constante C (constante par rapport à la variable u, mais pouvant dépendre de v), c'est à dire une fonction $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ne dépendant que de v, telle que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{C(v)}{u^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{u} \cdot C(v). \qquad (4)$$

La fonction de 2 variables $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car g est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, pour tout valeur de $u \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction d'une variable $v \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en la variable v sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour $u = 1$, on obtient le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction C. Ainsi, C admet une primitive φ sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle (sa dérivée C étant de classe $\mathcal{C}^1$). Ainsi, en primitivant l'égalité (4) par rapport à v, à u fixé, on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence d'un réel $\theta(u)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(u,v) = \sqrt{u} \cdot \varphi(v) + \theta(u).$$

La fonction θ s'écrit comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$, considérée comme fonction de 2 variables, donc aussi en tant que fonction d'une variable. On a donc trouvé deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, φ et θ, telles que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(u,v) = \sqrt{u} \cdot \varphi(v) + \theta(u).$$

Soit maintenant $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons qu'il existe des réels strictement positifs (u,v) tels que

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \qquad \text{et} \qquad y = \sqrt{uv}.$$

En mutlipliant ces deux équations, ou en les divisant, on trouve directement les seules valeurs possibles de u et v :

$$u = xy \qquad \text{et} \qquad v = \frac{y}{x}.$$

Réciproquement, ces valeurs de u et v conviennent, et sont bien dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, d'après la relation liant f et g, on a, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$f(x,y) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy).$$

Définissons :

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \theta(xy), \quad (\varphi,\theta) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)\} \subset \mathcal{C}^2((\mathbb{R}_+^*)^2),$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions solutions de (1).
Nous venons de prouver que toute fonction de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.
La première question justifie au contraire que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.
Ainsi, on a l'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Correction de l'exercice 20 – (fonctions homogènes)

1. (a) Soit f une fonction positivement homogène de degré α, et $i \in [\![1,n]\!]$. Soit, à $t > 0$ fixé, g_t la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$g_t(x_1,\dots,x_n) = f(tx_1,\dots,tx_n) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g_t(X) = f(tX), \qquad \text{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

D'après les règles de dérivation de fonctions composées, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et, en posant pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j(X) = tx_j$,

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(X) \frac{\partial f}{\partial x_j}(tX).$$

Or, les u_j ne dépendent pas de x_i si $j \neq j$. Il reste donc :

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(X) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(X) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX)$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$g_t(X) = t^\alpha f(X),$$

donc, en dérivant par rapport à x_i,

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(X) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(X).$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$t \frac{\partial f}{\partial x_i} tX = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(X).$$

Comme t a été fixé strictement positif, on peut simplifier par t, et il vient :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad t \frac{\partial f}{\partial x_i} tX = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(X).$$

Ceci étant vrai pour tout $t > 0$, on en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est positivement homogène.

(b) Soit h la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = f(tx_1, \ldots, tx_n).$$

Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, v_i définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $v_i(t) = tx_i$, de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après les règles de composition, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad h'(t) = \sum_{j=1}^{n} v_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX).$$

De plus, pour tout $t > 0$,

$$h(t) = t^\alpha f(X), \qquad \text{donc:} \qquad h'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(X).$$

Ainsi, pour tout $t > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX) = \alpha t^{\alpha-1} f(X).$$

En particulier, en évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \alpha f(X).$$

(c) Réciproquement, supposons que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \alpha f(X).$$

D'après les règles de composition, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tX) = \frac{1}{t} \alpha f(tX),$$

d'après l'équation satisfaite par f, prise au point tX. Ainsi,

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

C'est une équation différentielle de type connu ($\varphi' = g\varphi$), dont les solutions sont $\varphi = K\mathrm{e}^G$, G étant une primitive de g. Ainsi, il existe un réel K tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = K\mathrm{e}^{\alpha \ln t} = Kt^\alpha.$$

En évaluant en $t = 1$, on trouve $K = \varphi(1) = f(X)$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tX) = t^\alpha f(X).$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que f est positivement homogène de degré α.

2. (a) Supposons que f_0 est une solution positivement homogène de degré α de $(*)$. D'après la question 1(b), on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = \alpha f_0(x,y).$$

Ainsi,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha f_0(x,y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, la seule fonction homogène qui puisse être solution de $(*)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_0(x,y) = \frac{1}{\alpha}(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, pour tout $t > 0$,

$$((tx)^4 + (ty)^4)^{\frac{1}{2}} = t^2(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}},$$

donc $\alpha = 2$. Donc, nécessairement $f_0(x,y) = \frac{1}{2}(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}$.
Réciproquement, vérifions que f_0 ainsi définie est solution de $(*)$. On a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 \frac{1}{2(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^3}{(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}}$$

et de même,

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 4y^3 \frac{1}{2(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^3}{(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi,

$$x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4}{(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^4}{(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}} = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc f_0 est bien solution de $(*)$.

(b) Vous aurez rectifiés le ∂y qui s'était transformé en ∂x.
Soit f une solution de $(*)$, et soit $g = f - f_0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) \\ &= (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}} - (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}} = 0,\end{aligned}$$

puisque f et f_0 sont toutes deux solutions de $(*)$.
Réciproquement, soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $g = f - f_0$, donc $f = g + f_0$. Supposons que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) \\ &= 0 + (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}} = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de $(*)$ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 = 0 \cdot g(x,y).$$

Dans ce cas, g est positivement homogène de degré 0, d'après la question 1(c). On en déduire que pour tout $X \in \mathbb{R}$, et tout $t > 0$, $g(tX) = t^0 g(X) = g(X)$. En particulier, en prenant la limite lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures, on trouve :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad g(X) = g(0).$$

Ainsi, g est constante

(c) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(*)$. D'après la question précédente,

$$\mathcal{S} \subset \{f_0 + C, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

Réciproquement, la constante C se dérivant en 0 par rapport à x et par rapport à y, et f_0 étant solution de $(*)$, les fonctions $f_0 + C$ sont aussi solutions de $(*)$. Par conséquent,

$$\mathcal{S} = \{f_0 + C, \quad C \in \mathbb{R}\}$$

où f_0 est la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}$.